

Théorie des langages

Correction de TD n°0

Exercice 1

$$aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$$

Question (a)

Pour montrer que R est une relation d'équivalence, il faut que :

- R soit réflexive $\forall x \in E \quad xRx$
- R soit symétrique $\forall x, y \in E \quad xRy \Leftrightarrow yRx$
- R soit transitive $\forall x, y, z \in E \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Montrons que R est réflexive.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors on a } \begin{cases} x^2 - x^2 = 0 \\ x - x = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } x^2 - x^2 = x - x \Leftrightarrow xRx$$

R est réflexive

Montrons que R est symétrique

Soit $x, y \in \mathbb{R}$

Par hypothèse on a xRy

d'où

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Leftrightarrow -(x^2 - y^2) = -(x - y) \\ &\Leftrightarrow -x^2 + y^2 = -x + y \\ &\Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x \Leftrightarrow yRx \end{aligned}$$

R est alors symétrique.

Montrons que R est transitive.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors on a } \begin{cases} x^2 - y^2 = x - y & \Leftrightarrow xRy & L_1 \\ y^2 - z^2 = y - z & \Leftrightarrow yRz & L_2 \end{cases}$$

En sommant $L_1 + L_2$ on a :

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 : \quad x^2 - y^2 + y^2 - z^2 &= x - y + y - z \\ x^2 - z^2 &= x - z \\ \Leftrightarrow x R z \end{aligned}$$

R est donc transitive.

On a montré que R est une relation d'équivalence.

Question (b)

On note $\dot{x}$ la classe de représentant x qui est définie par :

$$\dot{x} = \{y \in E \mid x R y\}$$

Ainsi dans notre cas :

$$\begin{aligned} \dot{2} &= \{y \in \mathbb{R} \mid 2 R y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid 2^2 - y^2 = 2 - y\} \end{aligned}$$

Reprenons l'équation

$$2^2 - y^2 = 2 - y$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{identité remarquable}$$

d'où

$$\div (2-y) \begin{cases} (2-y)(2+y) = 2-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$\forall y \neq 2 \text{ div}(0) \text{ imp.}$

Puisque R est réflexive on a $y = 2$ aussi.

$$\text{Ainsi, } \dot{2} = \{-1; 2\}$$

En raisonnant de la même manière, on obtient en fait : $\dot{x} = \{1-x, x\}$

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$

$$XRY \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

Question (a)

Montrons que R est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$ les parties de E .

Montrons que R est réflexive

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$

On a $A \cap X = A \cap X$ évident
d'où XRX , R est réflexive.

Montrons que R est symétrique.

Soit $X, Y \in \mathcal{P}(E)$

Alors on a $A \cap X = A \cap Y \Leftrightarrow XRY$.

Puisque l'opération $=$ est commutative alors on obtient :

$$A \cap Y = A \cap X \Leftrightarrow YRX$$

d'où R est symétrique.

Montrons que R est transitive.

Soit $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$

Alors on a $A \cap X = A \cap Y \Leftrightarrow XRY$

$$A \cap Y = A \cap Z \Leftrightarrow YRZ$$

d'où $A \cap X = A \cap Y = A \cap Z \Leftrightarrow XRZ$.

R est alors transitive.

Question (b)

On note E/R l'ensemble quotient qui est lui défini par :

$$E/R = \{ \dot{x} \} \quad \forall x \in E$$

$\dot{x}$ est l'ensemble des classes de représentant x pour R .

Si $A = \emptyset$

On a $A \cap X = A \cap Y$

$$\emptyset \cap X = \emptyset \cap Y$$

$$\emptyset = \emptyset$$

toujours vraie
 $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$

Ainsi pour $A = \emptyset$

On note $\mathcal{P}(E) / \mathcal{R} = \mathcal{P}(E)$.

Si $A = E$

On a $A \cap X = A \cap Y$

$$E \cap X = E \cap Y$$

Ceci est vrai si $X = Y$

Exercice 3

On dit qu'une loi T est **associative** si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E \quad (x T y) T z = x T (y T z)$$

Commençons par calculer $(x * y) * z$
séparément.

$$x * y = axy + b(x + y) + c$$

• Calcul de $(x * y) * z$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= a(axy + b(x + y) + c)z + b(axy + b(x + y) + c) + z \\ &= (a^2xy + abx + aby + ac)z + abxy + b^2(x + y) + bz \\ &= a^2xyz + abxz + abyz + acz + abxy + b^2x + b^2y + bz \end{aligned}$$

• Calcul de $x * (y * z)$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= ax(ayz + b(y + z) + c) + b(x + ayz + b(y + z) + c) + c \\ &= a^2xyz + abxy + abxz + acx + bx + abyz + b^2(y + z) + c \\ &= a^2xyz + abxy + abxz + acx + bx + abyz + b^2y + b^2z + c \end{aligned}$$

Note loi $*$ est commutative si:

$$a^2 \cancel{xgz} + a \cancel{bxz} + a \cancel{byz} + acz + a \cancel{bxg} + b^2 \cancel{x} + b^2 \cancel{y} + b \cancel{c} + b \cancel{z} \\ = a^2 \cancel{zyz} + a \cancel{byx} + a \cancel{bxz} + acx + bx + a \cancel{byz} + b^2 \cancel{g} + b^2 \cancel{z} + b \cancel{c} + c.$$

Après simplification:

$$acz + b^2 x + bz = acx + bx + b^2 z \\ \Leftrightarrow acz + b^2 x + bz - acx - bx - b^2 z = 0 \\ \Leftrightarrow ac(z-x) + b^2(x-z) + b(z-x) = 0 \\ \Leftrightarrow ac(z-x) + b^2(z-x) + b(z-x) = 0 \\ \Leftrightarrow (z-x)(ac + b^2 + b) = 0$$

Ainsi pour que $*$ soit associative on a deux possibilités:

- $z - x = 0 \quad L_1$
- $ac + b^2 + b = 0 \quad L_2$

On cherche un lien entre a, b, c ainsi considérons uniquement la première équation L_2 .

Ainsi

$$ac + b^2 + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-b^2 - b}{c} \quad c \neq 0$$

Exercice 4

Soit (G, T) un magma, on appelle **groupe abélien** un loi telle que:

- (G, T) est **associative**
- (G, T) admet un **élément neutre**
- Tout élément de (G, T) admet un **symétrique**
- (G, T) est **commutatif** $\Leftrightarrow$ abélien.

Question (a)

$$xab = a \Leftrightarrow xabb^{-1} = ab^{-1}$$

$$xa = ab^{-1} \Leftrightarrow xaa^{-1} = ab^{-1}a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = ab^{-1}a^{-1}$$

Puisque (G, τ) n'est pas commutatif on ne peut rien faire.

Question (b)

On considère que G est commutatif ainsi on reprend le résultat précédent:

$$x = ab^{-1}a^{-1}$$

$$x = aa^{-1}b^{-1}$$

$$x = 1b^{-1}$$

$$x = b^{-1}$$

Exercice 5

$$x * y = |x - y| \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Question (a)

$(E, *)$ est commutatif si

$$x * y = y * x \quad \forall x, y \in E$$

Dans notre cas

$$x * y = |x - y| = |y - x| = y * x$$

Ainsi $(\mathbb{N}, *)$ est commutatif.

Question (b)

$(E, *)$ est associatif si

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in E$$

Dans notre cas

$$\text{Prenons } x = 2 \quad y = 4 \quad z = 5$$

$$|x - y| = |2 - 4| = |-2| = 2$$

$$|(x * y) - z| = |2 - 5| = |-3| = 3$$

$$|x - |y - z|| = |2 - |4 - 5|| = |2 - 1| = 1$$

$3 \neq 1$, alors $(\mathbb{N}, *)$ n'est pas associative.

Question (c)

Soit $(E, *)$ un magma et $e \in E$.

On dit que e est élément neutre de $*$ si et seulement si :

$$x * e = e * x = x \quad \forall x \in E$$

Dans notre cas :

- $(\mathbb{N}, *)$ est commutative (cf. q(a)).

$$\text{Alors } x * e = e * x$$

- Pour $e = 0$

$$x * 0 = |x - 0| = |x| = x$$

Puisque $x * 0 = 0 * x = x$

Alors 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{N}, *)$.

Question (d)

Soit $(E, *)$ un magma.

Si $\exists x^{-1} \in E, \forall x \in E \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ où e est l'élément neutre. Alors tous les éléments de E admettent un inverse.

On parle de symétrique.

On cherche $x^{-1} \in \mathbb{N}$

$$\text{tel que } x * x^{-1} = e$$

$$\Leftrightarrow |x - x^{-1}| = 0$$

$$\text{On } \forall x \in E, |x - x| = |0| = 0$$

$$\text{Ainsi } x * x = x * x = 0 = e$$

Tout élément de $\mathbb{N}$ s'admet lui-même comme inverse.

Question (e)

$(\mathbb{N}, *)$ n'est pas un groupe car le magma n'est pas associatif.