Mathématiques pour l'informatique 1

Les cours du module " Maths Pour l'Info " du semestre 2

Killian Reine

Licence 1
Mathématiques Informatique Physique Sciences pour l'Ingénieur
Orientation Informatique

Ressources utilisées :

- Supports de cours, Laurent Amanton
- Anciens supports tutorat MPI 2023-2024, Killian Reine

2024-2025

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

THÉORIE DES ENSEMBLES

1.1) Généralités sur les ensembles

1.1.1) Définitions générale

DÉFINITION ***(ensemble)***

On appelle **ensemble** une collection d'éléments distincts. Chaque élément d'un ensemble est unique et ne peux donc apparaître plusieurs fois.

Exemples

- L'ensemble des nombres pairs : $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
- L'ensemble binaire : $\{0, 1\}$
- Les ensembles déjà vu jusqu'à aujourd'hui : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

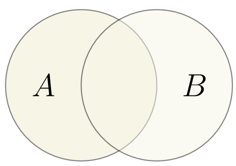
Remarque

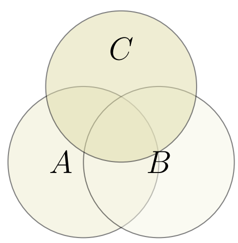
Les éléments d'un ensemble sont compris entre accolades $\{$ et $\}$, chacun séparés par une virgule $,$.
Un ensemble est souvent représenté par une lettre majuscule.

1.1.2) Diagramme de Venn

On utilise un **diagramme de Venn** pour représenter les relations entre plusieurs ensembles comme l'union, l'intersection et les différences.

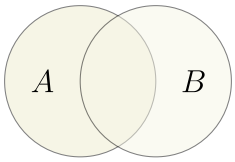
- ❏ Un ensemble est représentée par un cerlce.
- ❏ Chaque cercle qui représente un ensemble, prend en compte chaque élément distincts de l'ensemble.
- ❏ Les zones où deux cercles se chevauchent est appelée **intersection**.
- ❏ La partie extérieure du diagramme (le reste) peut représenter l'univers.

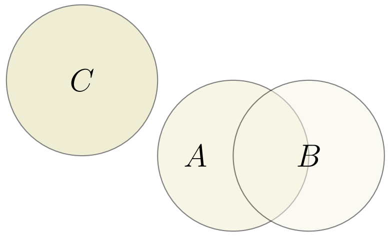




Remarque | Dans un diagramme de Venn, **toutes les intersections doivent apparaître <u>même si elles sont vide</u>**.

1.1.3) Diagramme d'Euler





<u>Contrairement au diagramme de Venn</u>, la représentation des intersections vide **est libre**. C'est à dire que l'on peut les représenter comme à gauche avec le chevauchement de A et B ou alors ne pas représenter une intersection vide comme à droite avec A et C.

1.1.4) Description par image directe

On considère l'ensemble E suivant :

Alors $E = \{peigne, éponge, lunettes, brosse, téléphone, clé\}$

Remarque | <u>Par convention,</u>
- Les ensembles sont désignés par une lettre majuscule
- Les éléments d'un ensemble sont représentés par une lettre minuscule

Exemples
Il existe plusieurs "types" d'ensembles :
- Ensemble **fini** : $E = \{0, 1, 2, 3\}$
- Ensemble **infini** : $\mathbb{R}$

DÉFINITION *(fini, infini)*

- ❏ Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre d'éléments *dénombrable*.
- ❏ Un **ensemble infini** est un ensemble qui possède une nombre d'éléments *non-dénombrable*.

1.1.5) Descriptions d'ensembles particulièrs

DÉFINITION *(ensembles particuliers)*

- Un **ensemble vide** est un ensemble qui ne possède aucun éléments.
  On note $E = \emptyset = \{\}$
- Un **singleton** est un ensemble qui ne possède qu'un seul et unique élément.
  On note $E = \{un\_seul\}$
- Une **paire** est un ensemble qui possède deux éléments.
  On noyte $E = \{toi, nous\}$
- L'ensemble des booléens (vrai/faux) est fini et noté $E = \{0, 1\}$.
- Un ensemble peut être défini à l'aide d'une propriété. Alors pour qu'un élément x appartiennent à E il faut qu'il valide la condition.

$$E = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$$

  où $\mathcal{P}$ est la propriété.

Exemple
On considère un ensemble E et une propriété $\mathcal{P}(x) =$"$x = 2k$ tel que $k \in \mathbb{Z}$" que x doit respecter pour appartenir à E.
On a ainsi :

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Et, cet ensemble est celui des nombres pairs car tout nombre pair s'écrit sous la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, un entier relatif.

Rappel de cours

Un entier relatif peut être négatif ou positif.

1.2) Application en informatique

En informatique, l'introduction des ensembles n'a pas toujours bien été définie :

- Liste
- Pile
- Tableau associatif
- Set
- sac (= multiset)

1.2.1) Les ensembles en langage C

En C, il n'y a pas de type `set` natif sans utiliser de bibliothèque externe. Alors, pour pouvoir utiliser des structures de la même manière que des ensembles :

- On utilise un tableau (trié ou non)
- On vérifie nous-même l'unicité des éléments du tableau

1.2.2) Les ensembles en Java

Référence : Extrait du cours de Java fonctionnel de Killian Reine (L2 INFO).

DÉFINITION ***(HashSet)***

`HashSet` est une implémentation de l'interface `Set<E>`. Ce dernier est utilisé pour stocker des éléments unique.
En gros, il ne **permet pas de stocker des doublons**.
Pour gérer ses données, `HashSet` utilise une table de hachage en interne (HashMap).

Caractéristiques principales

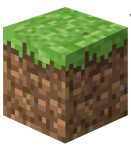
- Les éléments d'un `HashSet` sont uniques.
  Si vous souhaitez ajouter un élément déjà présent, ce dernier ne sera pas ajouté
- Les données ne sont pas ordonnées.
- Si on ajoute/supprime un élément, l'ordre peut changer.

Rappel de cours

Puisque `HashSet` implémente `Set<E>` et hérite de `Collection<E>` ainsi, elle propose les méthodes suivantes :

- `add(E elem)`, `remove(Object o)`, `clear( )`
- `isEmpty( )`, `contains(Object o)`
- *et d'autres...*

Exemple, Partie spéciale sur Minecraft



- Dans Minecraft, un joueur a un inventaire, mais on veut s'assurer que certains types d'objets ne peuvent pas être dupliqués. Par exemple, dans une partie spéciale, un joueur ne peut avoir qu'un seul exemplaire de chaque outil rare (comme une " épée de diamant " , une " pioche enchantée ", etc.).

```java
import java.util.HashSet;

public class MinecraftInventory {
    public static void main(String[] args) {
        HashSet<String> inventory = new HashSet<>();

        inventory.add("Épée de diamant");
        inventory.add("Pioche enchantée");
        inventory.add("Arc puissant");

        System.out.println("Inventaire : " + inventory);

        boolean ajoutEpee = inventory.add("Épée de diamant");
        if (!ajoutEpee) {
            System.out.println("Tu as déjà une Épée de diamant
            dans l'inventaire !");
        }

        if (inventory.contains("Pioche enchantée")) {
            System.out.println("Tu as une Pioche enchantée !");
        } else {
            System.out.println("Tu n'as pas encore de Pioche enchantée.");
        }

        inventory.remove("Arc puissant");
```

```
26            System.out.println("Après suppression, inventaire : " + inventory);
27
28            System.out.println("Nombre d'outils dans l'inventaire : " +
29            inventory.size());
30        }
31    }
```

Remarque On tente d'ajouter (ligne 13) l'item " Épée de diamant " dans `inventory`, mais cette dernière est déjà dans l'inventaire alors, la valeur de `ajoutEpee` sera fausse.

```
Inventaire : ["Épée de diamant", "Arc puissant", "Pioche enchantée"]
Tu as déjà une Épée de diamant dans l'inventaire !
Tu as une Pioche enchantée !
Après suppression, inventaire : ["Épée de diamant", "Pioche enchantée"]
Nombre d'outils dans l'inventaire : 2
```

Remarque Cette parenthèse ne sert pour le moment que de culture générale, les apsects poussés de la programmation en Java seront abordés en L2 INFORMATIQUE.

1.2.3) Les ensembles en python

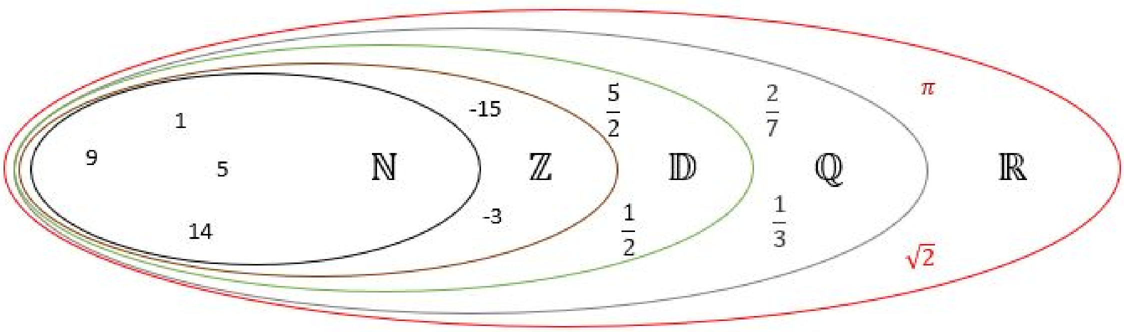
Python quant à lui possède les structures `set` qui permettent de définir des ensembles par extensions.

Exemple

```
L = [0, 1, 2, 3, 4]
E = set(L)
#Affichera {1, 2, 3, 4} dans un ordre aléatoire
```

1.3) Retour sur les ensembles de nombres

Vous connaissez je pense déjà les ensembles suivants depuis le lycée, auquels on a ajouté l'ensemble des complexes en début d'année en **Algèbre de base**.



L'ensemble des complexes lui possède tous les nombres de $\mathbb{R}$ donc tout ceux de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{D}$, de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{N}$. En gros l'ensemble des nombres complexes englobe tout les autres nombres connus.

Remarque

Vous connaissez déjà ces ensembles :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels

Puis, en **Algèbre de base***au premier semestre*, nous avons ajouté l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

1.3.1) Rétrospective sur l'ensemble des nombres pairs

Comme déjà évoqué plus tôt, l'ensemble des nombres pairs englobe les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple
On souhaite définir cet ensemble mais pour des nombres pairs non nuls et positifs.

- $P = x \in \mathbb{N} \mid x$ est pair.
- $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
- $P = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}^*\}$
- $P = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \exists k \in \mathbb{N}^* \mid x = 2k\}$

Vous pouvez traduire ces ensembles en français et vous verrez qu'au final ils désignent tous la même chose.

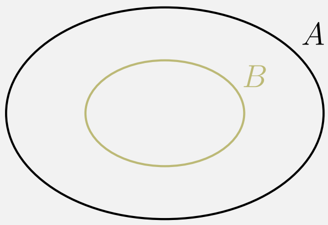
1.4) Opérations sur les ensembles

1.4.1) Inclusion entre les ensembles

DÉFINITION ***(Inclusion)***

Soient A et B deux ensembles. On dit que B est **inclus** dans A si et seulement si *tous les éléments qui sont dans B sont aussi dans A*. On note :

$$B \subset A \Longleftrightarrow \forall x \in B, \; x \in A$$



Remarque

➩ Si $B \subset A$, on dit alors que B *est une partie de* A.

➩ **Cas particulier** :

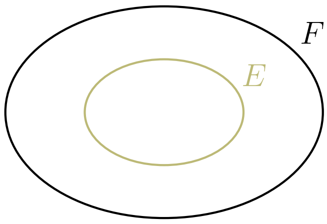
$$A \subset B \text{ et } B \subset A \Longleftrightarrow A = B$$

La double inclusion (dans les deux sens) implique l'égalité des deux ensembles.

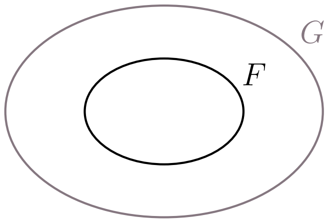
Propriétés de l'inclusion
Soient E, F et G trois ensembles.

- $\emptyset \subset E$
  L'ensemble vide est inclu dans tous les ensembles.
- **Réfléxivité**, $E \subset E$
  Un ensemble est une partie de lui-même.
- **Antisymétrie** $A \subset F \subset E \Longrightarrow E = F$
  La double inclusion (dans les deux sens) provoque l'égalité de deux ensembles.
- **Transitivité**, Si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.

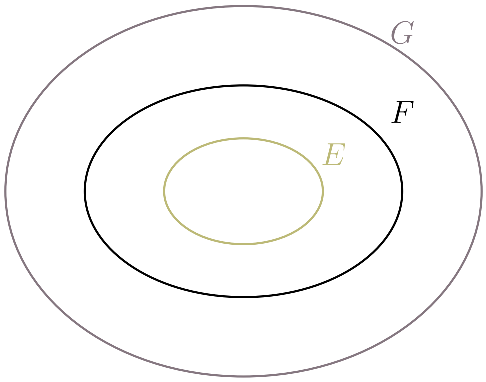
<u>Zoom sur la transitivité</u>
Pour mieux comprendre la transitivite, vous pouvez essayer de manière illustrée.
Puisque $E \subset F$ alors on peut tracer un cercle représentant l'ensemble F et dedans, on trace E puisqu'il est inclu dans F, on a bien dit que ça implique que tous les éléments de E sont dans F.
Vous obtenez le dessin suivant :



On peut alors faire la même chose avec G et F puisque on a aussi $F \subset G$. Donc on dessiner un ensemble G dans lequel se trouve F.
Vous obtenez ainsi :



Enfin,
en combinant on obtient le schéma suivant :



On remarque bien que E est alors dans G ce qui implique que $E \subset G$. La propriété de transitivité vient d'être montrée de manière visuelle.

Remarque

à bien faire attention
Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- $\{1, 2\} \subset E$ car tous les éléments du sous-ensemble appartiennent à E.
- $\{1\} \subset E$ (pour les mêmes raisons)
- $\{1, 2\} \notin E$, un ensemble ne peut appartenir à un autre, et puis l'élément est coposé de deux éléments de E
- $1 \in E$, l'élément 1 est présent dans l'ensemble E ainsi 1 "appartient" à E.

Récap des notations :

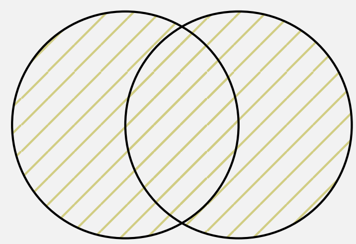
- $=$ pour l'égalité
- $\subset$ pour l'inclusion
- $\in$ pour l'appartenance
- $\notin$ pour la non-appartenance
- $\Longrightarrow$ pour l'implication
- $\emptyset$ l'ensemble vide

1.4.2) *Opérations de création d'ensemble*

DÉFINITION *(union $\cup$)*

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.
L'opération d' **union** de deux ensembles permet de créer un nouvel ensemble noté $A \cup B$ qui contiendra à la fois les éléments de A et aussi les éléments de B.
Plus rigoureusement :

$$A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

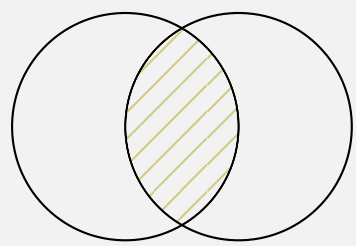


$A \cup B$

DÉFINITION *(intersection $\cap$)*

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.
L'opération d' **intersection** de deux ensembles permet de créer un nouvel ensemble noté $A \cap B$ qui contiendra les éléments communs entre A et B.
C'est à dire que l'ensemble résultant contiendra les éléments qui sont dans A et en même temps dans B.
Plus rigoureusement :

$$A \cap B = \{x \in A \text{ et } x \in B\}$$

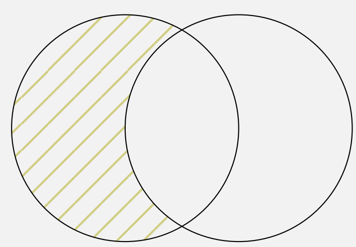


$A \cap B$

DÉFINITION *(différence $\backslash$)*

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.
L'opération de **différence** de deux ensembles permet de créer un nouvel ensemble noté $A \backslash B$ qui contiendra les éléments de A en enlevant les éléments de B.
C'est à dire que l'ensemble résultant contiendra les éléments de A qui ne sont pas dans B.
Plus rigoureusement :

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$



$A \backslash B$

Remarque

- La notation $A \backslash B$ se lit *"A privé de B"*.
- Puisque l'ensemble résultant créé avec $A \backslash B$ contient en tous les éléments de $\overline{B}$ en commun avec A. On note :

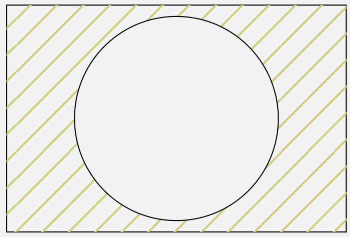
$$A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

- Si $x \in \overline{B}$ alors ça revient à dire "x **n'appartient pas** à B".

DÉFINITION *(complémentaire $\complement$)*

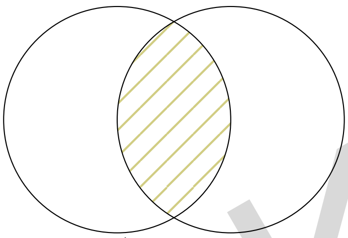
Soient E un ensemble et A une partie de E.
L'opération de **complémentaire** d'un ensemble et de sa partie permet de créer un nouvel ensemble noté $\complement_E(A)$ ou encore A^c qui contiendra les éléments de E qui ne sont pas dans A.
C'est à dire que l'ensemble résultant contiendra les éléments de E qui n'apparaissent pas dans A. Ducoup on peut aussi noté $E \backslash A$.
Plus rigoureusement :

$$\complement_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

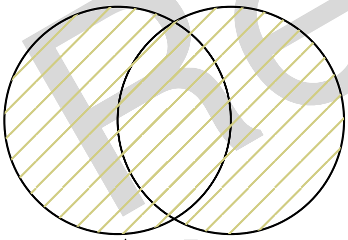


$\complement_E(A)$

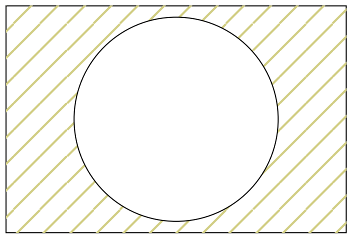
Petit récap des opérations données jusqu'à lors :
Soient E un ensemble et A, B des parties de E.
A est le cercle de gauche, B celui de droite et E est représenté par un rectangle



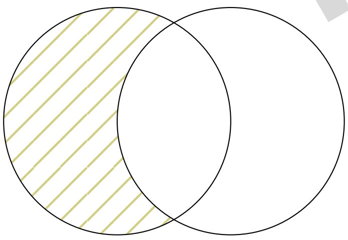
$A \cap B$



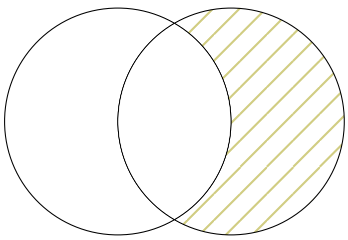
$A \cup B$



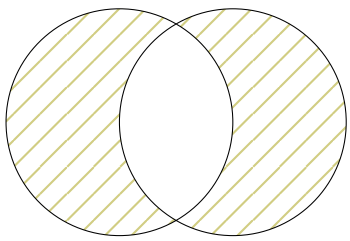
$\complement_E(A)$



$A \backslash B = A \cap \overline{B}$



$B \backslash A = B \cap \complement_E(A)$



$(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Priorité des opérations

- ❑ $\complement$ est prioritaire sur $\cap$ et $\cup$
- ❑ $\cap$ et $\cup$ sont prioritaires sur $\subset$ et $=$

1.4.3) Propriétés algébrique des opérations d'ensembles

Propositions
Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

- **Associativité**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

en gros l'associativité c'est le fait que l'on puisse "déplacer" les parenthèses sans changer l'issu du résultat.

- **Commutativité**

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

en gros la commutativité c'est le fait que l'on puisse changer l'ordre des composantes du calcul sans pour autant changer le résultat final.

- **Élément neutre**

$$A \cap E = A \qquad A \cup \emptyset = A$$

en gros un élément est dit neutre lorsqu'il ne change pas l'issu d'un résultat.

> **Exemple**
> Dans l'addition, 0 est un élément neutre. Dans la multiplication 1 est un élément neutre.

- **Élément absorbant**

$$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup E = E$$

en gros un élément est dit absorbant lorsque muni d'une opération, elle donne lui-même.

> **Exemple**
> Dans la multiplication 0 est un élément absorbant.

- **Distributivité**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Remarque || $\cup$ et $\cap$ sont distributifs l'un envers l'autre.

- **Propriétés du complémentaire**

➩ $\complement_E(E) = \emptyset$ ➩ $\complement_E(\complement_E(A)) = A$ ➩ $\complement_E(A) \cap A = \emptyset$
➩ $\complement_E(\emptyset) = E$ ➩ $\complement_E(A) \cup A = E$
➩ $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$ ➩ $\complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B)$

1.4.4) Loi de Morgan

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.
➩ $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{\cup}\overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ➩ $\overline{A \cap B} = \overline{A}\overline{\cap}\overline{B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.4.5) *Autres propriétés*

textbfPropositions
Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

- **Autres propriétés du complémentaire**
  - ➩ $A \backslash B = A \cap \complement_E(B) = A \backslash (A \cap B)$
  - ➩ $A = (A \cap B) \cup (A \cap \complement_E(B))$
- **L'inclusion**
  - ➩ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$
  - ➩ $(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$
  - ➩ $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$

DÉFINITION ***(disjonction d'ensembles)***

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.
On dit que **A et B sont disjoints** si et seulement si :

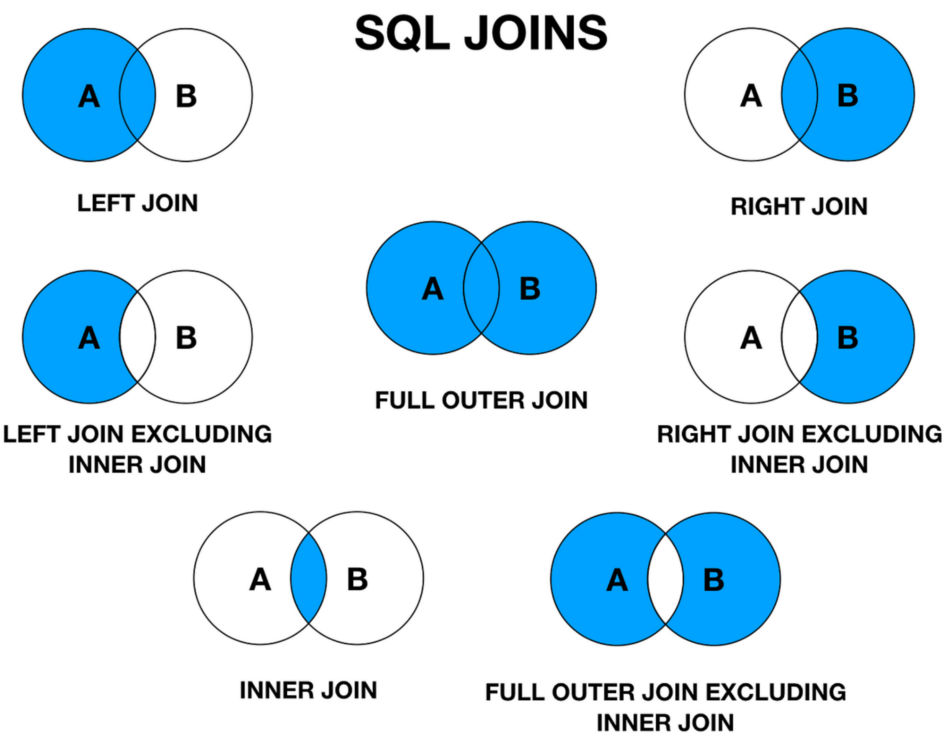
$$A \cap B = \emptyset$$

En gros, deux ensembles sont disjoints si ils n'ont aucuns éléments en commun.

Proposition
Soit A un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ n parties de A. Alors :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

1.5) Application informatique des ensembles



1.6) Introduction aux applications

DÉFINITION *(application)*

Soit E et F deux ensembles, On note :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- ❏ f est une **application** qui a pour tout x dans E associe **un unique élément** de F.
- ❏ L'élément est appelé **image** de x par $f(x)$.
- ❏ On pose $y = f(x)$ où x est l'**antécédent** de y par f.

Remarque

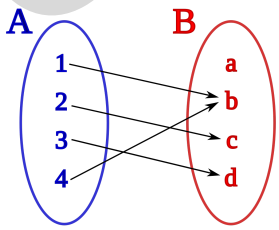
Les applications ont des similitudes avec les fonctions en informatique :

- Une fonction possède un nom (= ici f)
- Une fonction possède des paramètres (= ensemble E)
- Une fonction possède une valeur de sortie (= ensemble F)
- Un code de fonction (= application)

Soient E et F deux ensembles, et soit $f : E \to F$ une application.
L'ensemble défini par :

$$\{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$$

est appelé le **graphe de l'application f**.



1.7) Notion, Le produit cartésien

DÉFINITION *(Produit cartésien)*

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$, n-ensembles.
On appelle **Produit cartésien** généralement noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et définit plus rigoureusement par :

$$\prod_{k=1}^{n} E_k = \{\underbrace{(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n)}_{n-uplet}\}$$

Autrement dit, le produit cartésien de n-ensembles donne un ensemble de n-uplets où l'élement à la position k appartient à l'ensemble E_k.

Exemple *pour illuster*
Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{5, 6, 7\}$ alors on a :

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}$$

Remarque

A la grande différence des ensembles, un n-uplet est une structure mathématiques **ordonnée**. Ainsi l'ordre des éléments a une importance.

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

2.1) Bases et propriétés

Remarque Le **raisonnement logique** fais partie des caractéristiques principales des mathématiques.

DÉFINITION *(logique)*

La **logique** se veut conforme au bon sens, cohérent ou encore rationnel.
On peut dire d'une chose qui n'est pas logique qu'elle est incohérente, absurde.

Pour **démontrer** par un raisonnement logique, il va falloir énoncer des propriétés, des propositions et des théorèmes mathématiques.
C'est justement l'objectif de ce chapitre.

DÉFINITION *(propriété)*

Une **propriété** est une phrase (*déclaration*) dont on peut savoir sans ambiguïté sa valeur de vérité :

❏ VRAI ❏ FAUX

On parle aussi d'*assertion* en informatique.

Rappel de cours

Une assertion en programmation est un test qui permet au développeur de savoir si les valeurs retournées par une fonction sont valides ou non.

Exemple
"Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2k$ est un nombre pair et $2k + 1$ est un nombre impair."

Remarque

- **en pratique**, on énonce uniquement des propriétés qui sont vraies.
- Pour prouver la validité d'une propriété on utilise des démonstrations ce qui plus difficile.
- Pour montrer qu'une propriété est périmée, il suffit de trouver un contre-exemple.

2.2) Les connecteurs logiques

DÉFINITION *(connecteurs logiques)*

Les **connecteurs logiques** sont des opérateurs utilisées sur les propriétés. Ils permettent d'écrire de nouvelles propriétés à partir de celles qui existent déjà.

- négation $\neg$
- conjonction (et) $\wedge$
- équivalence $\Longleftrightarrow$
- disjonction (ou) $\vee$
- implication $\Longrightarrow$

2.2.1) Le non-logique $\neg$

DÉFINITION *(négation)*

Soit $\mathcal{P}$ une propriété.
La **négation** de la propriété $\mathcal{P}$ dite "non-$\mathcal{P}$", est notée $\neg\mathcal{P}$.

- **Vraie** si $\mathcal{P}$ est fausse.
- **Fausse** si $\mathcal{P}$ est vraie.

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
0	1
1	0

Exemple
Prenons la propriété $\mathcal{P}$: "$x \geq 4$". La propriété $\neg\mathcal{P}$: "$x < 4$". Elle est vraie si $x < 4$ et fausse si $x \geq 4$.

2.2.2) Le ou-logique $\vee$

DÉFINITION *(disjonction)*

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propriétés.
La **disjonction** de la propriété $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dite "$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$", est notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$.

- **Vraie** si au moins une est vraie.
- **Fausse** si les deux sont fausses.

$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$		$\mathcal{Q}$	
		0	1
$\mathcal{P}$	0	0	1
	1	1	1

Exemple
Prenons les propriété $\mathcal{P}$: "$x \geq 4$" et $\mathcal{Q}$: "$x < 10$". Vraie tant que $x \geq 4$ ou tant que $x < 10$.

2.2.3) Le et-logique $\wedge$

DÉFINITION *(conjonction)*

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propriétés.
La **conjonction** de la propriété $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dite "$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$", est notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$.

- **Vraie** si les deux propriétés sont vraies.
- **Fausse** si au moins une est fausse.

$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$		$\mathcal{Q}$	
		0	1
$\mathcal{P}$	0	0	0
	1	0	1

Exemple
Prenons les propriété $\mathcal{P}$: "$x \geq 4$" et $\mathcal{Q}$: "$x < 10$". Vraie tant que $x \geq 4$ et tant que $x < 10$.
Ducoup si $x = 2$ la propriété $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ est fausse.

2.2.4) L'implication $\Longrightarrow$

DÉFINITION *(conjonction)*

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propriétés.
L' **implication** de la propriété $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dite "$\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$", est notée $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

- **Vraie** si $\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$.
- **Fausse** si $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$.

$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$		$\mathcal{Q}$	
		0	1
$\mathcal{P}$	0	1	1
	1	0	1

Exemple
Soit $\mathcal{P}$: "Il pleut" et $\mathcal{Q}$: "le sol est mouillé" on exprime $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$: "**Si** il pleut, **alors** le sol est mouillé"..
Le fait qu'il pleuve (que $\mathcal{P}$ soit vrai) a pour conséquence de vérifier $\mathcal{Q}$.

Remarque || Si $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ l'est nécessairement.

2.2.5) L'équivalence $\Longleftrightarrow$

DÉFINITION *(conjonction)*

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propriétés.
L' **équivalence** de la propriété $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dite "$\mathcal{P}$ équivaut à $\mathcal{Q}$", est notée $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$.

- **Vraie** si :
  - Les deux propriétés sont fausse.
  - Les deux propriétés sont vraies.
- **Fausse** si :
  - La valeur de vérité des propriétés est inverse l'une de l'autre.

$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$		$\mathcal{Q}$	
		0	1
$\mathcal{P}$	0	1	0
	1	0	1

Exemple
Soit $\mathcal{P}$: "Il pleut" et $\mathcal{Q}$: "le sol est mouillé" on exprime $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$: "Il pleut, **si et seulement si** le sol est mouillé".

Remarque || Si $\mathcal{P}$ est vraie (resp. fausse) $\mathcal{Q}$ l'est aussi nécessairement.

2.3) Application informatique

Tables de vérité en informatique

and $a.b$

a	b	f_9
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

nand $\overline{a.b}$

a	b	f_8
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

nor $\overline{a+b}$

a	b	f_2
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

or $a+b$

a	b	f_{15}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

xor $a \oplus b$

a	b	f_7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.4) Propriétés et priorités logiques

Priorité des connecteurs logiques

- $\neg$ est prioritaire sur $\vee$ et $\wedge$
- $\vee$ et $\wedge$ sont prioritaires sur $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$

2.4.1) Propriété de $\wedge$ et $\vee$

Propriétés
Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propriétés.

- **Associativité** de $\wedge$ et $\vee$

  $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ $\qquad$ $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$

- **Commutativité** de $\wedge$ et $\vee$

  $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$ $\qquad$ $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$

- **Éléments neutre**

  $\mathcal{P} \wedge vrai \Longleftrightarrow \mathcal{P}$ $\qquad$ $\mathcal{P} \vee faux \Longleftrightarrow \mathcal{P}$

- **Éléments absorbant**

  $\mathcal{P} \wedge faux \Longleftrightarrow faux$ $\qquad$ $\mathcal{P} \Longleftrightarrow vrai$

- **Distributivité** de $\wedge$ et $\vee$

  $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \Longleftrightarrow (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$ $\qquad$ $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \Longleftrightarrow (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$

2.4.2) Propriétés de la négation $\neg$

Propriétés
Soit $\mathcal{P}$ une propriété.

- $\neg(vrai) \Longleftrightarrow faux$
- $\neg(\neg\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \mathcal{P}$
- $\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{P} \Longleftrightarrow faux$
- $\neg(faux) \Longleftrightarrow vrai$
- $\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{P} \Longleftrightarrow vrai$

2.4.3) Loi de Morgan

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propriétés, les propriétés suivantes sont vraies.

$$\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \iff (\neg\mathcal{P}) \wedge (\neg\mathcal{Q}) \qquad \neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \iff (\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})$$

Exemple du cours
Soit $n \in \mathbb{N}$
D'après la loi de Morgan, l'inverse de la propriété "n n'est pas pair" **ou** "n n'est pas impaire" est la propriété suivante :

"n n'est pas pair" **et** "n n'est pas impaire"

2.4.4) Propriétés de $\Longrightarrow$ et $\iff$

Propriétés
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propriétés.

$(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \iff (\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ Ainsi $\neg(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \iff \neg(\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$

On peut alors réinterpréter l'équivalence comme suit :

$$\begin{aligned}(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}) &\iff (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}) \\ &\iff (\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\neg\mathcal{Q} \vee \mathcal{P})\end{aligned}$$

et à l'inverse,

$$\begin{aligned}\neg((\mathcal{P} \iff \mathcal{Q})) &\iff \neg((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P})) \\ &\iff \neg((\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\neg\mathcal{Q} \vee \mathcal{P})) \\ &\iff (\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg\mathcal{P})\end{aligned}$$

2.5) Prédicats et quantificateurs

DÉFINITION ***(prédicat)***

Un **prédicat** est une phrase déclarative qui contient une ou plusieurs variables et dont la vérité dépend des valeurs prises par ces variables dans un ensemble E (appelé domaine).
Pour que le prédicat ait un sens, il faut toujours préciser le domaine E.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}(x)$ défini par : "x est un nombre pair", avec $x \in \mathbb{Z}$.
   Le prédicat $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour $x = 2, 4, 6, \ldots$, et faux pour $x = 1, 3, 5, \ldots$.
2. Soit $\mathcal{Q}(x, y)$ défini par : "$x + y > 0$", avec $x, y \in \mathbb{R}$.
   Le prédicat $Q(x, y)$ est vrai pour des couples (x, y) tels que $x + y > 0$.
3. Soit $\mathcal{R}(n)$ défini par : "n est divisible par 3", avec $n \in \mathbb{N}$.
   Le prédicat $\mathcal{R}(n)$ est vrai pour $n = 3, 6, 9, \ldots$, et faux pour $n = 1, 2, 4, \ldots$.

DÉFINITION ***(quantificateurs)***

Les **quantificateurs** sont des symboles qui permettent de préciser la portée des variables des prédicats mis en jeu dans une propriété afin d'écrire des propriétés plus complexes.
Il en existe 2 :

- Le quantificateur universel $\forall$
- Le quantificateur existenciel $\exists$

Proposition *quantificateur universel*
Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété sur les éléments de E.
La propriété selon laquelle "pour chaque/tout élément x dans E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie" est notée :

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

Proposition *quantificateur existenciel*
Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété sur les éléments de E.
La propriété selon laquelle "pour **au moins** un élément x dans E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie" est notée :

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

Remarque

Soit $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensembles à n éléments :

- $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$
  $\mathcal{P}(a_1) \wedge \mathcal{P}(a_2) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(a_n)$
- $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$
  $\mathcal{P}(a_1) \vee \mathcal{P}(a_2) \vee \ldots \vee \mathcal{P}(a_n)$

Proposition
Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ un prédicat portant sur les éléments de E.

- $\neg(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \iff \exists x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$
- $\neg(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \iff \forall x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$

Le plus simple à retenir c'est simplement que $\neg\exists = \forall$ et $\neg\forall = \exists$.

Remarque Faites attention à l'ordre des quantificateurs !

Chapitre 3

Éléments d'analyse réelle

3.1) Définitions générales

DÉFINITION *(analyse)*

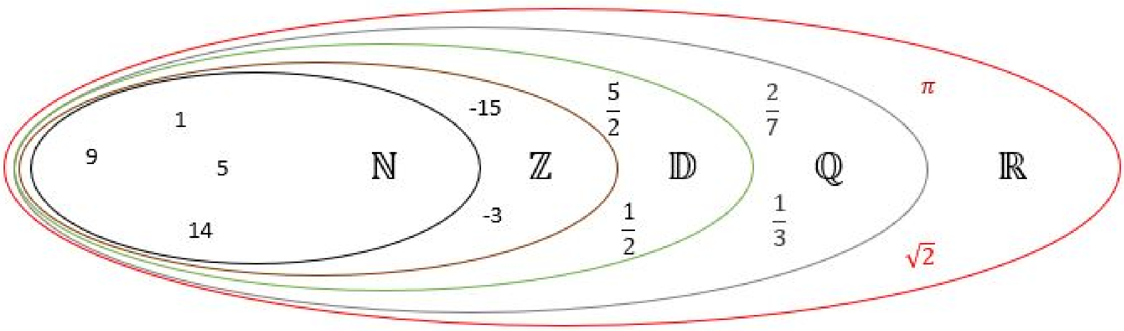
L'**analyse** représente la branche d'étude du continu en mathématiques.

Exemple d'analyses

- Analyse des nombres réels et complexes
- Suites numériques, fonctions numériques
- ...

Remarque — L'analyse est utilisée dans différents domaines en informatique comme les statistiques et les probabilités (IA par ex.).

Schéma des ensembles connus



Remarque — On voit très bien sur le schéma que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ englobe tous les autres ensembles, ainsi $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ par exemple.
En gros tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi dans $\mathbb{R}$.

3.2) Les parties de $\mathbb{R}$

Rappel de cours

Partie d'un ensemble
Soit A et B deux ensembles, on dit que "B est une partie de A" si et seulement si tous les éléments de B appartiennent à A.
Pour faire la liaison avec vos connaissances du chapitre 1, on note $B \subset A$.

DÉFINITION ***(différence)***

Soit E un ensemble et A une partie de E.
L'ensemble $E \backslash A$ représente l'ensemble des éléments de E **privé** des éléments de A.

$$E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

et se lit *"x dans E tel que x n'appartient pas à A"*.

DÉFINITION ***(0 exclu)***

Soit E un ensemble.
L'ensemble E^* représente l'ensemble des éléments de E **privé** de 0.

$$E^* = E \backslash \{0\} = \{x \in E \mid x \neq 0\}$$

et se lit *"x dans E tel que x est différent de 0"*.

DÉFINITION ***(les positifs)***

Soit E.
L'ensemble E_+ représente l'ensemble des éléments de E **positifs**.

$$E_+ = \{x \in E \mid x \geq 0\}$$

et se lit *"x dans E tel que x est plus grand ou égal à 0"*.

DÉFINITION ***(les négatifs)***

Soit E un ensemble.
L'ensemble E_- représente l'ensemble des éléments de E **négatifs**.

$$E_+ = \{x \in E \mid x \leq 0\}$$

et se lit *"x dans E tel que x est plus petit ou égal à 0"*.

Remarque

Ainsi si je souhaite représenter l'ensemble des positifs stricts je peux le représenter comme suit :
Soit E un ensemble

$$E_+^* = E_+ \backslash \{0\} = \{x \in E \mid x > 0\}$$

3.3) L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$

DÉFINITION *($\mathbb{Q}$ les rationnels)*

L'ensemble des rationnels est défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, pgcd(p,q) = 1 \right\}$$

où

- ❏ $pgcd(p,q)$ est le plus grand diviseurs commun de p et de q.
- ❏ La condition $pgcd(p,q) = 1$ signifie que les entiers p et q sont premiers entre eux (l'unique diviseurs commun de p et q est 1).

Rappel de cours

Plus grand commun diviseur
Soit $n \in E$.
C'est le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que k divise k-fois n.

Exemple
On cherche le $pgcd(30,12)$ décomposons 30 et 12 en produit de nombres premiers.

- $12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$
- $30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$

Ainsi, $pgcd(30,12) = 2 \times 3 = 6$.

Remarque || Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a, b deux entiers et $b \neq 0$.

3.3.1) *Les nombres irrationnels* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

DÉFINITION *(nombre irrationnel)*

Un **nombre irrationnel**, à l'inverse d'un rationnel est un nombre qui ne peut pas être écrit sous forme de quotient $\frac{a}{b}$.

Remarque || Les nombres irrationnels incluents les nombres à virgule infinie.

Propriété
L'ensemble des réels noté $\mathbb{R}$ inclu tous les nombres entiers et décimaux y compris les irrationnels. Ainsi, les irrationnels représentent en fait l'ensemble des réels **privé des nombres rationnels**. C'est pour cette raison que l'on note généralement l'ensemble des irrationnels :

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

3.4) Raisonnements mathématiques

3.4.1) Généralités sur les raisonnements

DÉFINITION *(raisonnement mathématiques)*

On appelle **raisonnement mathématiques** un processus logique qui consiste en une suite d'idées ou d'arguments de manière cohérente (= logique) permettant d'arriver à une conclusions à partir d'hypothèses faites au préalable ou de faits énoncés.

Exemple
Vous devez déterminer si vous allez prendre votre parapluie pour sortir.

1. **Hypothèse 1 :** Si il pleut, il est nécessaire de prendre son parapluie
2. **Hypothèse 2 :** La météo indique qu'il pleut aujourd'hui

Par un raisonnement de bon sens, puisque la météo a indiqué qu'il allait pleuvoir alors vous prenez votre parapluie.

3.4.2) Raisonnement par l'absurde

DÉFINITION *(l'absurde)*

Soit $\mathcal{P}$ une propriété.
Pour montrer la propriété à l'aide d'un **raisonnement par l'absurde**,

- ❏ On suppose que $\neg\mathcal{P}$ est vraie
- ❏ On montre que cette situation est impossible

Exemple
Soit $\mathcal{P}$ la propriété $\mathcal{P}$: "n^2 est pair alors n est pair".
Par l'absurde :
Supposons que si n^2 est pair alors n est impair.
Puisque n est impaire alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$
Ainsi, $n^2 = (2k + 1)^2 = 2(k^2 + 2k) + 1$
Puisque $k \in \mathbb{Z}$ alors $k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$
On peut alors poser $K = k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$
Ainsi $n^2 = 2K + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$ ce qui indique que n^2 est impair.
Ce qui est absurde car on a supposé n^2 pair.
Ainsi la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par l'absurde.

$$n^2 \text{ pair implique } n \text{ pair}$$

Exemple
Soit $\mathcal{P}$ la propriété "$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel"
Par l'absurde,
Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
C'est à dire que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Puisque $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel alors par définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}^* \mid \sqrt{2} = \tfrac{a}{b}, pgcd(a,b) = 1$$

En français puisque $\sqrt{2}$ est un rationnel alors il existe deux entiers a et b (premiers entre eux) avec $b \neq 0$ tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Isolons p :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ \sqrt{2}b &= a \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

D'après l'exemple précédant, $b^2 \in \mathbb{Z}$ donc $2b^2$ est pair.
Ainsi a^2 est pair, ce qui implique que a est pair.
D'où

$$\exists k \in \mathbb{Z} \mid a = 2k$$

Ainsi, on peut déterminer b

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 \\ 2b^2 &= (2k)^2 \end{aligned}$$

Alors b^2 est pair, implique b pair.
Ainsi on a a, b deux nombres pair, il ont donc un plus grand commnun diviseur qui est 2 ce qui contredit l'hypothèse $pgcd(a,b) = 1$.
D'où par l'absurde, la propriété $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est vraie.

3.4.3) Raisonnement par contraposée

DÉFINITION *(l'absurde)*

Soit $\mathcal{P}$ une propriété.
Pour montrer la propriété à l'aide d'un **raisonnement par contraposée**,

- ❏ On détermine $\neg\mathcal{P}$
- ❏ On montre qu'elle est vraie
- ❏ On en déduit alors que $\mathcal{P}$ est vraie

Exemple
On reprend la proposition de l'exemple précédant.
Soit $\mathcal{P} := n^2$ pair, alors n pair".
Par le principe de contraposée,
On doit montrer que :

Si n est impair alors n^2 est impair, $n \in \mathbb{Z}$

Puisque n est impair alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$
Ainsi :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 2k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$ alors $k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$ par conséquent on peut poser $K = k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$
Ainsi on a

$$\begin{aligned} n^2 &= 2(k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2K + 1 \\ &= impair \end{aligned}$$

La contraposée est alors vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.
D'où $\mathcal{P}$ est vérifié grace au principe de contraposé.

3.5) Intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$

DÉFINITION ***(Intervalles bornés, intervalles non bornés)***

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

- On appelle **intervalle borné** les éléments de la forme
  - $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
  - $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
  - $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  - $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- On appelle **intervalle non borné** les éléments de la forme
  - $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
  - $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$
  - $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$
- a, b sont les **bornes finies** de l'intervalle
- $-\infty, +\infty$ sont les **bornes infinies** de l'intervalle
- Si une des bornes finie d'un intervalle est compris dans l'intervalle alors on dit que ce dernier est **fermé**.
- A l'inverse, si aucune des bornes finies ne sont contenues dans l'intervalle il est dit **ouvert**.

Remarque

- Les intervalles $[a;b]$ sont appelés **segments**.
- Lorsque $a<b$ alors :
  - $b-a$ est la **longueur** de l'intervalle
  - $\frac{a+b}{2}$ est le **centre** de l'intervalle

Propriétés admises
Reprenons les parties de $\mathbb{R}$ évoquées il y a quelques parties :

- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} =]-\infty;0]$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} =]-\infty;0[$
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0;+\infty[$

Remarque $[1;+\infty[$ est un intervalle fermé, alors que $]1;+\infty[$ est un intervalle ouvert.

3.6) Éléments particuliers d'une partie de $\mathbb{R}$

DÉFINITION ***(majorant)***

Soit A une partie **non-vide** de $\mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$).
On appelle α le **majorant** de A si :

$$\forall x \in A \qquad x \leq \alpha$$

Si A admet un majorant elle est dit **majorée**.

$$(A \text{ majorée}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \underbrace{\forall x \in A,\, x \leq \alpha}_{A \text{ est majorée par } \alpha}$$

DÉFINITION ***(minorant)***

Soit A une partie **non-vide** de $\mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$).
On appelle α le **minorant** de A si :

$$\forall x \in A \qquad x \geq \alpha$$

Si A admet un minorant elle est dit **minorée**.

$$(A \text{ minorée}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \underbrace{\forall x \in A,\, x \geq \alpha}_{A \text{ est minorée par } \alpha}$$

Remarque A est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Proposition
Il peut arriver que des parties possèdent une infinité de minorants (resp. majorants).

Exemple
Considérons $A = \{1, 2, 3\}$ une partie de $\mathbb{N}$.
Par définition de majorant et de minorant :

- $x \in \mathbb{R}$ minorant si $\forall y \in A$, $x \leq y$
- $x' \in \mathbb{R}$ majorant si $\forall y' \in A$, $x' \geq y'$

Le plus petit élément de A est 1 est le plus grand 3. Ainsi tout $x \geq 3$ est un majorant et tout $x \leq 1$ est un minorant.
D'où le fait qu'il y a comme minorants $]-\infty; 1]$ et comme majorants $[3; +\infty[$. Il en existe donc une infinité.

Propositions, cas particuliers
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée alors elle admet une infinité de majorants.
- Si A est minorée elle admet une infinité de minorants.

Soit $B = \emptyset$
Alors $minorants = majorants = \mathbb{R}$

Remarque || $\mathbb{N}$ n'est pas majorée. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas minorés ni majorés.

3.7) Preuve d'une propriété

3.7.1) *Propriété universelle*

DÉFINITION ***(preuve)***

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ un prédicat sur les éléments de E.
Considérons la propriété

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

Pour montrer que $\mathcal{P}$ est vraie

1. Choisir un élément de E de manière arbitraire
2. Puis on montre que $\mathcal{P}(x)$ est vraie

Le raisonnement commencera ainsi :

Soit $x \in E$.
Montrons que la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple
Soit $A = [-1; 3[$
Montrer que 5 est un majorant de A revient à montrer que

$$\forall x \in A,\, x \leq 5$$

Soit $x \in A$
Montrons que $x \leq 5$
Puisque $x \in A$, alors $-1 \leq x < 3$ et $3 < 5$ donc tout $x \in A < 5$.
5 majore bien l'ensemble A.

3.7.2) Propriété existentielle, preuve constructive

DÉFINITION *(preuve constructive)*

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ un prédicat sur les éléments de E.
Considérons la propriété existentielle suivante :

$$\exists x \in E \text{ tel que } \mathcal{P}(x)$$

- Une première solution serait de trouver un élément dans E puis de montrer qu'il satisfait la propriété.

Dans ce cas on commencera par :

Posons $x = \ldots$
Montre que pour $x \in E$, la propriété est vraie

Remarque || Cette méthode fonctionne bien lorsque la construction de x n'est pas trop dur.

Exemple
Montrons que $A = \{t^2 + 1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ est minorée.
Cela revient alors à montrer que

$$\exists \alpha \in A \mid \forall x \in A, x \geq \alpha$$

Une analyse rapide de A permet de déterminer de tête des minorants.
Posons $\alpha = 0$
Montrons que 0 est un minorant de A
Soit $x \in A$ alors $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t^2 + 1$
Or

$$t^2 \geq 0$$
$$t^2 + 1 \geq 1 \geq 0$$

Ainsi $x \geq \alpha$. Donc α est un minorant de A ;
A est belle est bien minorée.

3.8) Retour sur majorant et minorant

Remarque La démonstration sera revue lors des séances de tutorats avec d'autres exemples.

DÉFINITION ***(non majoration, non minoration)***

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, d'ailleur avec le chapitre 1 sur **les ensembles**, vous savez que l'on peut noter $A \subset \mathbb{R}$.
D'après la négation des propriétés de majorant et de minorant :

- A n'est pas majorée si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \text{ alors } \exists x \in A \text{ tel que } x > m$$

- A n'est pas minorée si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \text{ alors } \exists x \in A \text{ tel que } x < m$$

Exemple, *preuve de la non majoration*
Soit $A = \{t^2 + 1 \mid t \in \mathbb{R}\}$
Montrer que A n'est pas majorée revient à montrer que pour tout m trouvé, il existe toujours un élément de A plus grand que m.

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A \mid x > m$$

Soit $m \in \mathbb{R}$.
Montrons qu'il existe $x \in A$ tel que $x > m$
Il est impossible vu la constitution de l'ensemble de trouver de tête un $x \in A$ tel que $x > m$, il faut donc choisir un x qui dépend de m.
Posons $x = m^2 + 1$
Par le principe de contraposée montrons que $x \in A$ et $x > m$ Comme $m \in \mathbb{R}$ alors $m^2 + 1 \in A$
Ainsi, $x \in A$
Si $x = m$ alors on a $m = m^2 + 1$

$$m^2 - m + 1 = 0$$

En calculant Δ on trouve $\Delta = -3 \leq 0$, on en déduit que $m^2 - m + 1$ est strictement positif (vous pouvez effectuer le tableau de signes).
Alors $m^2 - m + 1 > 0 \iff m^2 + 1 > m$
Donc A n'admet pas de majorant.

DÉFINITION ***(prouver l'implication, l'équivalence)***

Soient $\mathcal{P}$et $\mathcal{Q}$ deux propriétés.

- **Pour montrer** $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
  - On suppose que $\mathcal{P}$ est vraie
  - On montre que $\mathcal{Q}$ l'est aussi
- **Pour montrer** $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
  - On montre $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
  - Puis on montre $\mathcal{Q} \iff \mathcal{P}$

3.9) Extremums des parties de $\mathbb{R}$

DÉFINITION ***(élément maximum)***

Soit $A \neq \emptyset$, une partie de $\mathbb{R}$.
On note $\alpha \in \mathbb{R}$ appelé **plus grand élément** ou **élément maximum** de A si :

$$\begin{cases} \alpha \in A \\ \text{et} \\ \forall x \in A, \quad x \leq \alpha \end{cases}$$

Autrement dit, α est l'élément maximum de A si :

- α est un élément de A
- Tous les autres éléments de A sont plus petit ou égal à α

Il est noté $max(A) = \alpha$.

DÉFINITION ***(élément minimum)***

Soit $A \neq \emptyset$, une partie de $\mathbb{R}$.
On note $\alpha \in \mathbb{R}$ appelé **plus petit élément** ou **élément minimum** de A si :

$$\begin{cases} \alpha \in A \\ \text{et} \\ \forall x \in A, \quad x \geq \alpha \end{cases}$$

Autrement dit, α est l'élément minimum de A si :

- α est un élément de A
- Tous les autres éléments de A sont plus grand ou égal à α

Il est noté $min(A) = \alpha$.

Propriété, *preuve d'unicité d'un extremum.*
Le but de cette démonstration était de prouver qu'il n'y a qu'un maximum (resp. minimum).
Soit $A \subset \mathbb{R}$ (une partie de $\mathbb{R}$).
Supposons que A possède au moins un maximum.
au moins : un implique 1 ou plus de maximum.
Soient α_1 et α_2 deux maximums de A.
Alors :

$$\begin{cases} \alpha_1 \in A \\ \text{et} \qquad \Longleftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2 \\ \qquad \alpha_2 \text{ majore } A \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 \in A \\ \text{et} \qquad \Longleftrightarrow \alpha_2 \leq \alpha_1 \\ \qquad \alpha_1 \text{ majore } A \end{cases}$$

Ainsi le fait que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \wedge \alpha_2 \leq \alpha_1$ implique nécessairement que $\alpha_1 = \alpha_2$
Ainsi, A en prenant deux maximums districts de A on a montré qu'ils étaient égaux, d'où A n'admet qu'un maximum.

DÉFINITION *(borne inférieure)*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On note $\alpha \in \mathbb{R}$ une **borne inférieure** de A si

$$\alpha = inf(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha \text{ est un minorant de } A \\ \text{et} \\ \qquad \alpha \text{ est le plus grand minorant de } A \end{cases}$$

La borne inférieure de A est notée $inf(A)$

DÉFINITION *(borne supérieure)*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On note $\alpha \in \mathbb{R}$ une **borne supérieure** de A si

$$\alpha = sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha \text{ est un majorant de } A \\ \text{et} \\ \qquad \alpha \text{ est le plus petit majorant de } A \end{cases}$$

La borne supérieure de A est notée $sup(A)$

Remarque

- Une borne n'est pas forcément un élément de A
- Si A possède un plus grand élément, c'est aussi la borne suppérieure de A.
- Si A possède un plus petit élément, c'est aussi la borne inférieure de A.

Exemple, Soit $A = [-1; 3[$

- Le plus petit élément de A est -1, alors c'est aussi la borne inférieure de A.
  On note $min(A) = inf(A) = -1$
- Puisque l'intervalle est ouvert, il ne possède pas de plus grand élément. Mais, tout élément supérieur ou égal à 3 est un majorant.
  Ainsi le plus petit des majorants est 3 qui est donc la borne supérieure, on note $sup(A) = 3$.

Remarque || Si les borne existent, **elles sont uniques**.

Proposition

- Tout partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

3.10) Opérations sur les réels

DÉFINITION *(partie entière)*

Soit $x \in \mathbb{R}$.
La **partie entière** du nombre x notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ vérifie :

$$E(x) \in \mathbb{Z} \text{ et } E(x) \leq x \leq E(x) + 1$$

Propriétés, *partie entière*

- $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$
- $E(x)$ est **le plus grand entier** inférieur ou égal à x.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\forall x \in [n; n+1[, E(x) = n$

DÉFINITION *(valeur absolue)*

Soit $x \in \mathbb{R}$.
La valeur absolue du nombre x, notée $|x|$ vérifie :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriété, *valeur absolue*
$\forall x, y \in \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$, alors $|x| = max\{x, -x\}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\forall a \geq 0, |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq 0$, valeur absolue positive
- $|x| = 0$ alors $x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ **inégalité triangulaire**

Exemple

$$|-2| = |2| = 2$$

CHAPITRE 4

LES SUITES

4.1) Généralités sur les suites

4.1.1) *Rappels et bases sur les suites*

Remarque

- Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application, on dit qu'elle est **continue**.
- Soit $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ une application qui prend comme valeurs des entiers naturels et renvoi un réel, on dit que l'application est **discrète**.

DÉFINITION ***(Suite)***

Soit E un ensemble alors,
toute application de la forme $u : \mathbb{N} \mapsto E$ est appelée **suite** d'éléments de E.
Une suite se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où :

- ❏ u_n est le **terme général** de la suite
- ❏ $n \in \mathbb{N}$ est appelé le **rang** (ordre, ou indice) de la suite
- ❏ $u(n) = u_n$ est le **terme de rang** $\mathbf{n}$

Remarque

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une donnée contenant des éléments de E **dans un ordre précis** correspondant à un *n-uplet* de la forme :

$$(u_0, u_1, \ldots, u_n)$$

où u_n est le $(n+1)^e$ terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque l'on commence à $n = 0$.

Propriété du début d'une suite
Il peut arriver que certaines suites soient définies à partir d'un certain rang, par forcément 0.
L'ensemble des rangs se trouvent ainsi dans l'ensemble $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq p\}$, en français, l'indice n est un entier suppérieur ou égal à p.
Cette suite ce note alors $(u_n)_{n\geq p} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}_p}$
Ainsi, le premier terme de la suite sera noté u_p.

Remarque

Soit $E \subset \mathbb{N}$ alors,
- Toute suite $u : E \mapsto \mathbb{R}$ est appelée **suite réelle**.
- Toute suite $u : E \mapsto \mathbb{C}$ est appelée **suite complexe**.

Exemple
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ n &\longmapsto u_n = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, cette suite n'est pas une suite numérique !
Puisque les éléments de u ne sont ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$ mais dans les métrices à coefficients réels de taille 2×2.

Rappel de cours

L'ensemble $\mathbb{K}$
Soit $x \in \mathbb{K}$ alors x est soit un réel ($x \in \mathbb{R}$) ou soit x est un complexe ($x \in \mathbb{C}$). *acquis du module "Algèbre de base"*

Exemples
- Soit $c \in \mathbb{K}$ alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite constante**.
- Soit $f : n \mapsto n^2 + 1$ une application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cette dernière est une suite réelle où :
  - Elle est notée $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$
  - Les premiers termes de la suite sont $(1, 2, 5, 10, \ldots)$
  - Le terme de rang 3 est donné par $u_3 = 10$ car $u_3 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$
- Soit $g : n \mapsto \frac{1}{n}$ une application bien définie si $n \neq 0$ ainsi, f est une application de $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  Sous forme de suite, on note $(i_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (i_n)_{n\geq 1} = \frac{1}{n}$ où $u_1 = 1$ et $u_5 = \frac{1}{5}$
  La suite n'est pas définie pour $n = 0$, le résultat n'existe pas, ainsi le premier terme est i_1.
- Soit $r : n \mapsto \sqrt{n-2}$
  Par définition, $\sqrt{x}$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ainsi r_n est définie $\forall n \geq 2$.
- La suite $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite complexe** de premiers termes $(1, i, -1, -i, \ldots)$.

Proposition - *égalité de deux suites*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.
On dit que u et v sont égales si et seulement si tous leurs termes sont égaux un à un.
On note :

$$((u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n)$$

Remarque

On peut généraliser cette définition à toute les suites commençant à un indice différent de 0.

Exemple
Déterminer si deux suites sont égales
Soit

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

En vrai, je suis d'accord avec vous, de vue ces deux suites ont l'air égales... Mais en fait non !
$\left(\frac{1}{n}\right)_1 = 1$ et $\left(\frac{1}{n+1}\right)_1 = \frac{1}{2}$
Les deux termes sont différents alors qu'ils sont tous deux de rang 1, ainsi les suites du dessus ne sont pas égales.

4.1.2) Opérations sur les suites

Propriétés - *Opérations sur les sommes*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors,

- Somme : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Produit par un scalaire : $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Produit : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4.2) Les suites récurrentes

4.2.1) Suite définie par récurrence

DÉFINITION ***(suite défine par récurrence)***

Soit E un ensemble et $f : E \mapsto E$ une application.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in E, \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n)$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **définie par récurrence**.
Autrement dit, une suite est définie par récurrence lorsque :

- Le ou les premiers termes sont définis (= donnés)
- Les termes suivants sont définis en fonction du ou des précédants

Exemple, *La suite de fibonnacci*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite où

$$u_0 = 0,\, u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

est la suite de fibonnacci, définie par récurrence.
Ainsi ses premiers termes sont :

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$$

4.2.2) Notion de suite arithmétique

DÉFINITION *(suite arithmétique)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
On dit que u_n est une **suite arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédant **en ajoutant toujours le même nombre**. Généralement on note ce nombre $r \in \mathbb{R}$ et on l'appelle la **raison** de la suite.
On note plus rigoureusement :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

où on a :

- r est la raison de la suite
- u_0 est le premier terme de la suite

Remarque

- La raison représente en fait la différence entre deux termes consécutifs.
  Ainsi, on note :

$$r = u_{n+1} - u_n$$

Propriété - *Variation de suite arithmétique*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors :

- Si $r > 0$ alors la suite est **croissante**.
- Si $r < 0$ alors la suite est **décroissante**.
- Si $r = 0$ alors la suite est **constante**.

Propriété - *Terme général d'une suite arithmétique*
La définition des termes suivants dans une suite arithmétique dépend du premier terme de la suite :

- Si u_0 est le premier terme alors $u_n = u_0 + n \times r$
- Si u_1 est le premier terme alors $u_n = u_1 + (n-1)r$
- En généralisant le second aspect,
  Si u_p est le premier terme avec $p \in \mathbb{N}$ alors $u_n = u_p + (n-p)r$

Exemple
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.
Alors :

- $u_n = u_0 + nr = 3 + 2n$
- $u_{n+1} = u_n + 2$

$$u_1 = u_0 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5 \text{ et puis } u_{10} = u_0 + 10 \times 2 = 3 + 20 = 23$$

On peut donc déterminer les premiers termes de u_n facilement.
Et, puisque $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

DÉFINITION *(Somme des n-premiers termes)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_p avec $p \in \mathbb{N}$ alors, la **somme des** $n-$**premiers termes** de la suite ici notée S_{u_n} est donnée par :

$$S_{u_n} = \frac{n}{2}(u_p + u_n)$$

Dans la propriété précédante, on a vu que si le premier terme est u_p alors $u_n = u_p + (n-p)r$
Ainsi en substituant u_n :

$$\begin{aligned} S_{u_n} &= \frac{n}{2}(u_p + u_n) \\ &= \frac{n}{2}(u_p + u_p + (n-p)r) \\ &= \frac{n}{2}(2u_p + (n-p)r) \end{aligned}$$

4.2.3) Notion de suite géométrique

DÉFINITION *(suite géométrique)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
On dit que u_n est une **suite géométrique** lorsqye chaque terme se déduit du précédant **en multipliant toujours par le même nombre**. Généralement on note ce nombre $q \in \mathbb{R}$ et il est appelé **raison** de la suite.
D'une manière plus rigoureuse, on note :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{R} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

où on a :

- q la raison de la suite
- u_0 le premier terme de la suite

Remarque

- La raison représente le quotient entre deux termes consécutifs.
  On note alors :

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Propriété - *Variation de suite géométrique*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ alors :

- Si $|q| > 1$ alors la suite **diverge**.
- Si $|q| < 1$ alors la suite **converge vers** 1.
- Si $q = 1$ alors la suite est **constante**.
- Si $q = -1$ alors la suite **oscille** entre deux valeurs.

Propriété - *Terme général d'une suite géométrique*
La définition des termes suivants dans une suite géométrique dépend du premier terme de la suite :

- Si u_0 est le premier terme alors $u_n = u_0 \times q^n$
- Si u_1 est le premier terme alors $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- En généralisant le second aspect,
  Si u_p est le premier terme avec $p \in \mathbb{N}$ alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$.
Alors :

- $u_n = 2 \times 3^n$
- $u_{n+1} = u_n \times 3$

$$u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6 \text{ et ducoup } u_{10} = 2 \times 3^{10} = 2 \times 59049 = 118098$$

On a donc réussi a déterminer les termes suivants facilement.
Et, puisque $|q| = 3 > 1$ alors la suite diverge.

Rappel de cours

Notion de divergence
Lorsque l'on dit qu'une suite **diverge** en gros ça veut dire que les termes un à un s'éloignent infiniment d'une valeur fixe au fur et à mesure qu'on avance dans la suite.

- Divergence vers $+\infty$
- Divergence vers $-\infty$

DÉFINITION ***(Somme des premiers termes d'une suite géométrique)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_p avec $p \in \mathbb{N}$ alors la **somme des** $n-$**premiers termes** de la suite notée ici S_{u_n} est donnée par :

- Si $q = 1$, la suite est **croissante**

$$S_{u_n} = n \times u_p$$

- Si $q \neq 1$ alors la somme de s$n-$premiers termes est donnée par :

$$S_{u_n} = u_p \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Remarque

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

- $u_0 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = n \times u_n$

Cette suite n'est pas récurrence car la fonction f dépend de n et de u_n.

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{u_n} - 1$$

L'application de récurrence f sous-jacente est donnée par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} - 1 \end{aligned}$$

Or, ici $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ il est donc impossible de définir u_2.

Remarque Il faut vérifier par une **preuve par récurrence** que $\forall n \in \mathbb{N}$ la fonciton $f(u_n)$ à ses valeurs dans l'ensemble défini.

DÉFINITION ***(Preuve par récurrence)***

Considérons une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. Définir la propriété $\mathcal{P}(n)$
   Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété " . . . ".
2. **INITIALISATION**
   Fixer un n_0 et montrer que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
   On pose $n_0 = \ldots$, montrons que la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
3. **HÉRÉDITÉ**
   En supposant que pour un $n \geq n_0$ fixé, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est elle aussi vérifiée.
   Soit $n \geq n_0$, on suppose la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie. On chercher à montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également.
4. **CONCLUSION**
   Une phrase pour conclure en disant que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

Considérons : $u_n = \begin{cases} u_0 &= 10 \\ u_{n+1} &= 1 + \dfrac{1}{u_n - 1} \end{cases}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

1. On pose $\mathcal{P}(n) = "u_n > 1"$
2. Pour $n = 0$, $u_0 = 10 > 1$ alors la propriété est vraie pour $n = 0$
3. Supposon $\mathcal{P}(n)$ vraie montrons $\mathcal{P}(n+1)$
   Par hypothèse de récurrence, $u_n > 1$, d'où $u_n - 1 > 0$

$$\frac{1}{u_n - 1} > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n - 1} > 0 + 1 = 1$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
4. D'après le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

4.2.4) Ordre d'une suite récurrence

DÉFINITION *(Ordre)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence. Le nombre de termes qui construisent la suite est appelé **ordre** de la suite récurrente.

Exemple, *Suite de Fibonnacci*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite où

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

L'ordre de cette suite est de 2, car u_0 et u_1 construisent la suite.

4.3) Propriétés sur les suites

4.3.1) Suites monotones

Propriétés - *Monotonie de suite*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **strictement croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **strictement décroissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$$

DÉFINITION *(suite monotone)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, elle est dite **monotone** si et seulement si elle respecte une des conditions suivantes.

- Elle est **constante**
- Elle est **croissante**
- Elle est **décroissante**

Remarque

- Une suite est dite **constante** ou **stationnaire** si tous ces termes sont égaux, on note $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_{n+1}$
- La notion de suite complexe croissante (resp. décroissante) n'a aucun sens.
- La notion de monotonie peut être valide **à partir d'un certain rang**.

Proposition - *Étudier la monotonie d'une suite*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Il existe trois méthodes pour déterminer la monotonie d'une suite :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, vérifier que $u_n > 0$ et comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
- Étudier les variations de la fonction f sous-jacente : $u_n = f(n)$

Exemple
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = n^2$.
Nous allons étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

- $u_n = n^2$
- $u_{n+1} = (n+1)^2$

Alors on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Étudions le signe du résultat :
Par définition, $n \in \mathbb{N}$ alors $n \geq 0$
Ainsi $n \geq 0 \iff 2n \geq 0 \iff 2n + 1 \geq 1 > 0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante.

Exemple
Soit $q > 0$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Puisque $q > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $q^n > 0$
De plus,

$$\frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{q^n \times q}{q^n} = q$$

Ainsi,

- Si $0 < q < 1$, alors la suite est décroissante
- Si $q = 1$ alors la suite est stationnaire
- Si $q > 1$, la suite est croissante

Rappel de cours

Propriété sur les puissances

$$x^{a+b} = x^a \times x^b$$

4.3.2) Majoration et minoration d'une suite

DÉFINITION *(suite majorée, suite minorée)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

$$(u_n \text{ majorée}) \iff \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq M$.

$$(u_n \text{ minorée}) \iff \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq M$$

Exemple
Soit $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ avec $n \geq 0$
Étudions cette suite.
Puisque $n \geq 0$ alors $n+1 \geq 1$ ainsi, $\frac{1}{n+1} \leq 1$ ce qui implique que la suite est *majorée par* 1.

DÉFINITION *(suite bornée)*

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si

$$\exists \alpha \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \alpha$$

Autrement dit imaginons deux barrières, α et $-\alpha$. Pour qu'elle soit bornée, la suite ne doit pas dépasser l'intervalle compris entre ces deux barrières.

Rappel de cours

Lien majorée, minorée
Une suite bornée est **minorée** et **majorée**.

Remarque

- Pour une suite complexe, $|u_n|$ correspond au module.
- Pour une suite réelle, on dit qu'elle est bornée si elle est majorée par α et minorée par $-\alpha$.
- Pour une suite réelle minorée par m et majorée par M, elle est bornée par $max(|m|, |M|)$.

Exemple
La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car majorée par 1 et minorée par 0.

Exemple
La suite $(\sqrt{n^2+1} - n)_{n\in\mathbb{N}}$

- $n^2 + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
- d'où $0 \leq \sqrt{n^2+1} - n \leq \sqrt{n^2+2n+1} - n = (n+1) - n = 1$
- Ainsi, $0 \leq \sqrt{n^2+1} - n \leq 1$

Exemple
La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$
$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq |\sin(n)| \leq 1$

Proposition - *Opération de suites bornées*

- La **somme** de deux suites bornées est une suite bornée.
- La **différence** de deux suites bornées et une suite bornée.
- Le **produit** de deux suites est une suite bornée.

4.4) Nature d'une suite

4.4.1) Limite d'une suite

DÉFINITION ***(limite)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
On dit que u_n **admet** ℓ **comme limite** si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon)$$

Remarque

- Il est possible d'adapter cette définition aux suites définies à partir d'un certain rang.
- La valeur des premiers termes d'une suite ne modifie pas la valeur de la limite.

Démonstration - *Recherche d'une limite*
Soit $u_n = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers c, autrement dit, il faut que l'on montre que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - c| \leq \epsilon)$$

Soit $\epsilon > 0$. Posons $n_0 = 0$

- Ainsi $n_0 \in \mathbb{N}$
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|u_n - c| \leq \epsilon$
  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n \geq n_0$
  Montrons que $|u_n - c| \leq \epsilon$
  On a $|u_n - c| = |c - c| = 0$ et puisque $\epsilon > 0$ alors $|u_n - c| \leq \epsilon$

La suite admet bien c comme limite.

Proposition - *Lemme*
Soit $x \in \mathbb{R}$ alors la propriété suivante est vérifiée :

$$(\forall \epsilon > 0, \quad |x| \leq \epsilon) \Longrightarrow x = 0$$

Démonstration
Avec le raisonnement par contraposée, il faut montrer que :

$$x \neq 0 \Longrightarrow (\exists \epsilon > 0, \quad |x| > \epsilon)$$

Supposons que $x \neq 0$. Montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $|x| > \epsilon$

- Posons $\epsilon = \frac{|x|}{2}$
- Comme $x \neq 0, \epsilon > 0$
- De plus comme $1 > \frac{1}{2}$, alors, $|x| > \frac{|x|}{2} = \epsilon$

Par contraposée, la proposition est vraie.

Proposition - *Unicité d'une limite*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, alors si cette suite admet une limite finie, cette dernière est **unique**.

Remarque || Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Proposition - *Limite et borne*
Si la suite numérique admet une limite ℓ, alors la suite est bornée.
Ainsi à l'inverse toute suite non bornée d'admet pas de limite finie.

DÉFINITION ***(limite infinie)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A)$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq -A)$$

Les limites infinies ne sont valides que pour des suites réelles.

Propriété - *Limite infinie*

- Si une suite tend vers $+\infty$ elle n'est pas majorée.
- Si une suite tend vers $-\infty$ elle n'est pas minorée.

DÉFINITION ***(convergence, divergence)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- ❑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** si elle admet une limite finie.
- ❑ Sinon elle **diverge**.

Remarque

- ❍ Toute suite convergente est bornée. (la réciproque est fausse)
- ❍ Une suite est divergente si elle n'a pas de limite finie (ex. $(-1)^n$) ou si elle admet une limite infinie.
- ❍ **Étudier la nature d'une suite** c'est déterminer/montrer si la suite converge ou si elle diverge.

4.4.2) Opérations sur les limites

Propriété - *Opérations sur les limites*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes respectivement vers ℓ_u et ℓ_v.

- ➤ Soit λ un scalaire, alors (λu_n) converge vers $\lambda\ell_u$.
- ➤ (u_n+v_n) converge vers $\ell_u+\ell_v$
- ➤ (u_nv_n) converge vers $\ell_u\ell_v$
- ➤ Soit $\ell_u\neq 0$ alors $(\frac{1}{u_n})$ converge vers $\frac{1}{l_u}$

Le tableau des limites usuelles sera donné ultérieurement...

Proposition - *Th. de convergence*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **deux suites réelles convergentes** :

- ➤ Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\geq 0$
- ➤ Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Proposition - *Th. des gendarmes*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.
Supposons que, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_n\leq v_n\leq w_n$$

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} w_n$$

Proposition - *Th. de comparaison*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Théorème
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite croissante et majorée**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite décroissante et minorée**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

4.5) Comparaison asymptotique

DÉFINITION ***(suite négligeable)***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle.
La suite (u_n) est dite **négligeable** par rapport à la suite (v_n) si :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$

DÉFINITION ***(suite négligeable)***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle.
La suite (u_n) est dite **équivalente** par rapport à la suite (v_n) si :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1.$$

On note alors $u_n \sim v_n$

Proposition - *Suites équivalentes, négligeables*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$.
Alors :

$$u_n \sim w_n \Leftrightarrow w_n = o(u_n)$$

Proposition - *Propriété des suites négligeables*
Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles,

- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda u_n = o(v_n)$
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$

DÉFINITION ***(Suite dominée)***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.
u_n est **dominée** par la suite v_n si :

$$\exists C > 0,\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \text{ on a } u_n \leq Cv_n$$

On notera alors $u_n = O(v_n)$

Exemple, $5n - 3 = O(n^2)$
On cherche donc une constante $C > 0$ tel que $5 - 3 \leq n^2$ à partir d'un certain rang n_0

$$5n - 3 \leq Cn^2$$

Par définition je sais que :

$$5n - 3 \leq 5n \leq n^2 \text{ pour } n_0 \geq 5$$

On vient donc de trouver le rang à partir duquel $5n - 3 \leq n^2$ donc $\forall n \geq 5$.
On a alors montrer que $5n - 3 = O(n^2)$. Notre constante ici est $C = 1$

Exemple, $2n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$
Je cherche un rang n_0 et une constante C tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 2n^2 + 3n + 1 \leq Cn^2$$

On vas alors décomposer notre expression :

$$\begin{aligned} 2n^2 &\leq 2n^2 \text{pour } n \geq 0 \\ 3n &\leq n^2 \text{pour } n \geq 3 \\ 1 &\leq n^2 \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

à partir de là le rang n_0 vas être celui pour lequel on respecte les 3 conditions des innéquations donc ici $n_0 = 3$.
Pour trouver notre constante C, reconstituons notre équation en additionnant chaque terme de nos inéquations construites juste avant, on obtient :

$$\begin{aligned} 2^n 2 + 3n + 1 &\leq 2n^2 + n^2 + n^2 \\ &\leq 4n^2 \end{aligned}$$

Et là, on à réussi à écrire $2n^2 + 3n + 1 \leq Cn^2$ avec $C = 4$
On vient donc de montrer que $2n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$ pour $n_0 = 3$ et $C = 4$

Chapitre 5

Les fonctions réelles

5.1) Généralités sur les fonction réelles

5.1.1) Notion de fonction et d'application

DÉFINITION ***(fonction réelle)***

Une **fonction réelle** à valeurs réelles, ou plus simplement *fonction réelle* est un objet mathématiques qui associe à tout nombre réel **au plus** un réel.

Remarque

La notation suivante :

$$f : x \mapsto f(x)$$

Se lit plus simplement "f *est la fonction qui associe à chaque réel* x *le réel* $f(x)$.

DÉFINITION ***(domaine de définition)***

On appelle **domaine de définition** ou **ensemble de définition** de f, l'ensemble noté D_f tel que pour tout $x \in D_f$, le réel $f(x)$ existe.

Exemple
Prenons la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Elle représente la fonction qui associe au réel x le réel $\frac{1}{x}$. Or, vous savez tous qu'une division par 0 est impossible.
Alors le domaine de définition peut être donné de plusieurs manières :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \\ &=]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ &= \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Prenons l'écriture générale suivante pour une fonction réelle :

$$\begin{aligned} f : D_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi ici on peut dire que :

- f est une fonction qui prend valeurs dans D_f et renvoie des valeurs réelles.
- x est appelé **antécédant** de y par la fonction f.
- y est appelé **image** de x par f.
- L'ensemble de toute les images par f est appelé **ensemble image** et il est aussi noté $f(D_f) = \{f(x) \mid x \in D_f\}$

Exemple
On a :

$$D_{cos} = D_{sin} = \mathbb{R}$$

Ce qui est vrai car vous n'êtes pas sans savoir que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Ainsi, avec les rappels effectués juste au dessus on note aussi que

$$cos(D_{cos}) = sin(D_{sin}) = [-1; 1]$$

DÉFINITION *(application réelle)*

Toute **application réelle** f tel que $D \subset \mathbb{R}$, son domaine de définition, est définie par :

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

On note aussi $f : x \mapsto f(x)$.

Remarque Dans une application tout élément de $\mathbb{R}$ peut posséder une, zéro ou plusieurs antécédants. **MAIS**, tout élément de D doit forcément avoir une unique image.

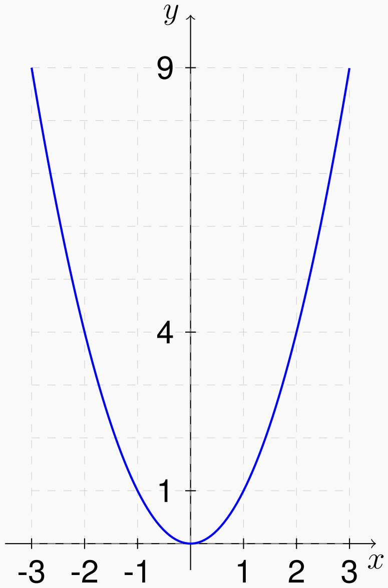
5.1.2) Courbe représentative

DÉFINITION *(courbe représentative)*

Soit f une fonction réelle.
Dans un repère **orthonormé**, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$ est appellé **courbe représentative** ou **graphe** de la fonction f et noté $\mathcal{C}_f$ définie par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$$

Exemple *de courbe représentative*



La courbe suivante représente la fonction $f : x \mapsto x^2$, tracée dans un repère orthonormé pour $x \in [-3, 3]$.

Pour preshot le cours, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$ possède une seule image pour la fonction $f(x) = x^2$, on parle ainsi d'**application**.
On a aussi $y = 4$ possède deux antécédants $x = \pm 2$ ainsi chaque image possède au moins un antécédant on parle alors d'**application surjective**.

Remarque || Les fonctions jugées *usuelles* sont a retrouvées dans une fiche annexe sur Eureka.

5.1.3) Opérations sur les ensembles

DÉFINITION *(somme de fonctions)*

Soit f et g deux fonctions de domaine de définition D_f et G_g respectivement, on note la **somme de deux fonctions** :

$$f + g : x = f(x) + g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

DÉFINITION *(Produit par un scalaire)*

Soit f une fonctions de domaine de définition D_f on note le **produit par un scalaire** d'une fonction λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$ défini par :

$$\lambda f : x = \lambda \times f(x) \qquad D_{\lambda f} = D_f$$

DÉFINITION *(Produit de fonctions)*

Soit f et g deux fonctions de domaine de définition D_f et G_g respectivement, on appelle **produit de deux fonctions** noté fg et défini par :

$$fg : x = f(x) \times g(x) \qquad D_{fg} = D_f \cap D_g$$

DÉFINITION *(Inverse d'une fonction)*

Soit f une fonctions de domaine de définition D_f on note le **l'inverse** d'une fonction $\frac{1}{f}$ défini par :

$$\frac{1}{f} : x = \frac{1}{f(x)} \qquad D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$$

DÉFINITION *(Quotient de fonctions)*

Soit f et g deux fonctions de domaine de définition D_f et G_g respectivement, on appelle **Quotient de deux fonctions** noté $\frac{f}{g}$ et défini par :

$$\frac{f}{g} : x = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$$

DÉFINITION *(Composition de fonctions)*

Soient f et g deux fonctions réelles avec D_f et D_g leur domaine de définition respectifs. On définit la **composée** de deux fonctions comme suit :

$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x)) = f \circ g$$

Autrement dit, la composition de fonction notée $f \circ g$ revient simplement à calculer pour un x_f donné $x_g = f(x_f)$ puis ensuite de calculer $g(x_g)$.

Remarque

- Il faut vérifier que $x_g \in D_g$ avant de calculer $g(x_g)$
- De manière général $f \circ g \neq g \circ f$ et $D_{f \circ g} \neq D_{g \circ f}$.
- L'opération $\circ$ n'**est pas commutative**.

Exemple
On considère deux fonctions f et g définies comme suit :

$$f : x \to x^2 - 4x \text{ et } g : x \to \frac{1}{x}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 4x) \\ &= \frac{1}{x^2 - 4x}\end{aligned}$$

à l'iverse on vas alors avoir :

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

5.1.4) Monotonie d'une fonction

DÉFINITION *(Définitions générale)*

Soit f une fonction réelle de domaine de définition D_f,

- ❏ La fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I si :

$$\forall x, x_o \in \mathrm{I} \text{ avec } x \leq x_0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \leq f(x_0)$$

Autrement dit lorsqu'à partir d'un certain rang $x_0 \geq x$ on remarque que pour tous les autres $x \in \mathrm{I}$ inférieurs à x_0, on a $f(x) \leq f(x_0)$.

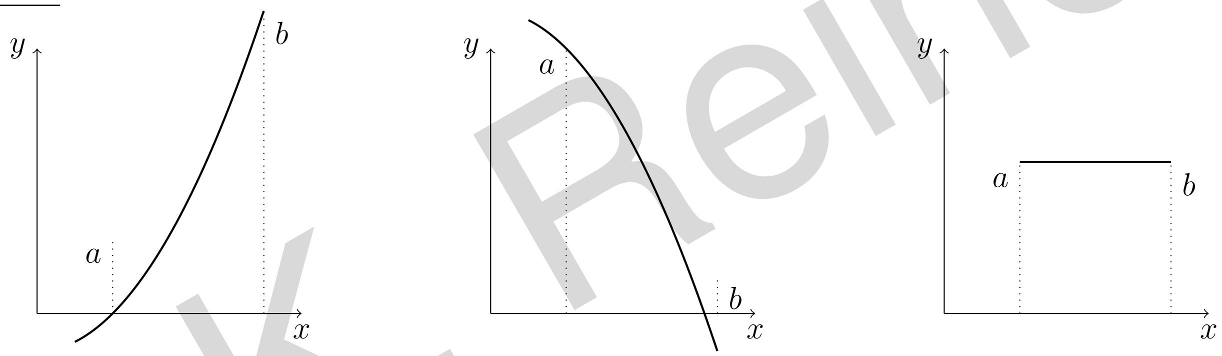
- ❏ La fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I si :

$$\forall x, x_o \in \mathrm{I} \text{ avec } x \leq x_0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \geq f(x_0)$$

- ❏ La fonction f est dite **monotone** sur I si elle est soit croissante soit décroissante sur I.

Remarque || Lorsque les inégalités sont stricte on parlera alors de fonction **strictement** croissante/décroissante.

Figure : Monotonie d'une fonction.



5.1.5) Minoration et majoration d'une fonction

DÉFINITION *(définitions générales)*

Soit f une fonction réelle définie sur un domaine de définition D_f.

- ❏ On dit que f est **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f$ on a $f(x) \leq M$.
- ❏ On dit que f est **minorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f$ on a $f(x) \geq M$.
- ❏ On dit que f est **bornée** si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f$, $f(x) \leq |\alpha|$.

5.2) Notion de limite de fonction

5.2.1) Généralités

DÉFINITION *($\mathbb{R}$ augmenté)*

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensembles des réels augmenté de $-\infty$ à $+\infty$.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

DÉFINITION *(Limite d'une suite)*

Soit f une fonction réelle définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$, avec $a \in \overline{R}$ ou une borne de D et $\ell \in \overline{R}$.
On dit que f admet une **limite** ℓ en a notée :

$$\underset{x \to a}{lim} f(x) = \ell$$

si et seulement si $\forall (u_x)_{x\in\mathbb{N}}$ une suite de réel définie sur D tel que $\underset{x \to +\infty}{lim} (u_x)_{x\in\mathbb{N}} = a$

$$\underset{x \to +\infty}{lim} f((u_x)_{x\in\mathbb{N}}) = \ell$$

Autrement dit,

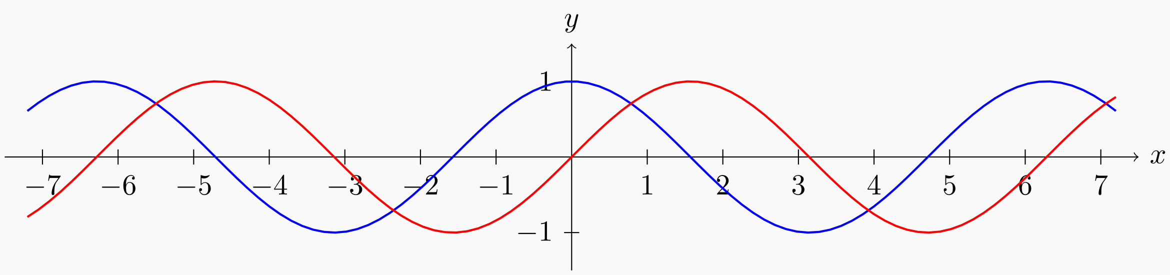
- peu importe comment on s'approche de a avec n'importe qu'elle suite $(u_x)_{x\in\mathbb{N}}$, la suite des images de $f(u_x)_{x\in\mathbb{N}}$ s'approche de ℓ.
  On lit :

Lorsque x tend vers a alors $f(x)$ tend vers ℓ.

Remarque

- Si f admet une limite alors elle est **unique**.
- Par contraposée : Si la limite de f n'est pas unique alors, cette dernière ne possède pas de limite.

Exemple
La fonction sinus (rouge) et la fonction cosinus (bleue) n'ont pas de limite.



Démonstration, *unicité de la limite*
Les suites $(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2n\pi + \frac{\pi}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

- $\sin(2\pi) = 0$
- $\sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$

Ainsi $(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(2n\pi + \frac{\pi}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ vers 1.
D'où la fonction sinus n'admet pas de limite.

DÉFINITION ***(Limite gauche/droite)***

- La fonction f admet ℓ comme **limite à gauche** de a, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réel de $D\cap]-\infty;a[$ qui tend vers a, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
  Notons le :
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$
- La fonction f admet ℓ comme **limite à droite** de a, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réel de $D\cap]a;+\infty[$ qui tend vers a, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
  Notons le :
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

Proposition

- Si f est ***définie en*** a alors :
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \ell$$
  Autrement, on dit que f est définie en a si et seulement si la limite à gauche et à droite sont égales à $f(a)$.
- Si f n'est pas définie en a, alors :
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$
  Du coup, si la limite a gauche et a droite sont égales à ℓ mais que $\ell \neq f(a)$ alors la fonction n'est pas définie en a.

Remarque

La notation a^+ et la notation a^-

- Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en a^+, en gros, on cherche ce qu'il se passe pour $f(x)$ lorsque x approche de a par valeurs suppérieures.
- Lorsque l'on cherche la limite d'une fonction f en a^-, en gros, on cherche ce qu'il se passe pour $f(x)$ lorsque x approche de a par valeurs inférieures.

Exemple (1), *fonction en morceaux*
On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

On cherche à savoir si la fonction f est définie en 2.
Posons $a = 2$. Il vas alors falloir calculer la limite en 2^- et la limite en 2^+.

- Calculons la limite en 2^-
  Lorsque x approche vers 2 par valeurs inférieures alors $x < 2$ d'ou on a $f(x) = x^2$
  Ainsi $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 = 4$
- Calculons la limite en 2^+
  Lorsque x approche vers 2 par valeurs suppérieures alors $x > 2$ d'où on a $f(x) = 4$.
  Ainsi $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$
- Calculons $f(2)$
  Pour $x = 2$, on prend $f(x) = x^2$
  d'où $f(2) = 2^2 = 4$

Ainsi puisque $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 4$, la fonction $f(x)$ est définie en $a = 2$.

Exemple (2) *fonction continue*
On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x + 1 \end{aligned}$$

On cherche à savoir si f est définie en 2.
Posons $a = 2$. Calculons la limite à gauche, puis à droite.

- Calculons la limite en 2^-
  Lorsque x approche de 2 par valeurs inférieures, $f(x) = 3x + 1$
  Ainsi $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \times 2 + 1 = 7$
- Calculons la limite en 2^+
  Lorsque x approche de 2 par valeurs suppérieures, $f(x) = 3x + 1$
  Ainsi $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \times 2 + 1 = 7$
- Calculons $f(2)$
  On a $f(2) = 3 \times 2 + 1 = 7$

Puisque $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 7$ alors la fonction f est définie en $a = 2$.

Proposition, *limite en a*
Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a, il suffit en fait de montrer que la limite à gauche est différente de la limite à droite.
On note :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Exemple
Prenons la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- ➤ La limite en 0^- est donnée par $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$
- ➤ La limite en 0^+ est donnée par $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$

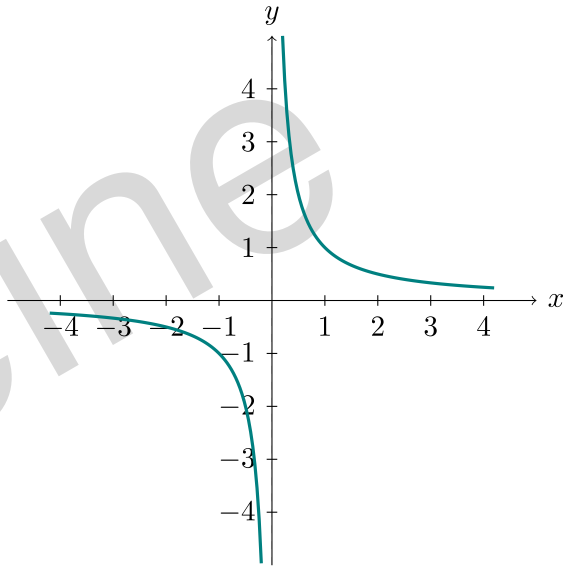
D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ce qui implique que la fonction f n'admet pas de limite en a.

La limite de $f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction f est bien définie tant que le dénominateur est différent de 0 donc si $x \neq 0$. D'où $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$
La fonction f admet alors une limite en 0^- et en 0^+

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Ainsi, la fonction f n'admet pas de limite en 0 car la limite à gauche est différente de la limite à droite.



5.2.2) Opérations sur les limites

Remarque || Les tableaux suivants sont à savoir.

$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
		ℓ_f	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ_g	$\ell_f+\ell_g$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
	$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
		0	$\ell_f \neq 0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0	$0^\dagger$	$0^\dagger$	FI
	$\ell_g \neq 0$	$0^\dagger$	$\ell_f\ell_g$	$\pm\infty^\dagger$
	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty^\dagger$	$\pm\infty^\dagger$

$\underset{x\to a}{lim}(\frac{f}{g})(x)$		$\underset{x\to a}{lim} f(x)$		
		0	$\ell_f \neq 0$	$\pm\infty$
$\underset{x\to a}{lim}\, g(x)$	0	FI	$\pm\infty^\dagger$	$\pm\infty^\dagger$
	$\ell_g \neq 0$	$0^\dagger$	$\frac{\ell_f}{\ell_g}$	$\pm\infty^\dagger$
	$\pm\infty$	$0^\dagger$	$0^\dagger$	FI

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(\frac{1}{g})(x)$	$\pm\infty^\dagger$	$\frac{1}{\ell}$	$0^\dagger$

Remarque

- **FI** ”Forme Indéterminée”, plusieurs méthodes pour les contrer.
  Voici les formes indéterminées :
  - $+\infty - \infty$
  - $0 \times \infty$
  - $\frac{0}{0}$
  - $\frac{\infty}{\infty}$
- † Réalisation d'une étude de signe pour le déterminer.

Exemple

On cherche la lamite de la fonction $x \mapsto (x^2+1)\sqrt{x}$ en 0.
Remarquons qu'on a $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = \sqrt{x}$, un produit de fonctions. Ainsi calculons la limite des deux fonctions indépendament puis essayons de déduire la limite finale.

- $\underset{x\to 0}{lim} f(x) = 0^2+1 = 1$
- $\underset{x\to 0}{lim} g(x) = \sqrt{0} = 0$

On a alors $\ell_f = 1$ et $\ell_g = 0$, ainsi d'après le tableau des limites d'un produit de fonction, on a :

$$\underset{x\to 0}{lim}(x^2+1)\sqrt{x} = 1 \times 0 = 0$$

Exemple

On cherche la limite en 3^+ et en 3^- de $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-3}$
Remarquons que nous avons un quotient de deux fonctions. Avec $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = x-3$.
On a :

$$\underset{x\to 3^-}{lim} f(x) = \underset{x\to 3^+}{lim} f(x) = 3^2+1 = 10$$

De plus :

- Pour $x < 3$ on a $x-3 < 0$ donc $\underset{x\to 3^-}{lim} g(x) = 0^-$
- Pour $x > 3$ on a $x-3 > 0$ donc $\underset{x\to 3^+}{lim} g(x) = 0^+$

D'après le tableau de la limite d'un quotient de deux fonctions avec $\ell_f = 10$ et $\ell_g = 0^\pm$ on a :

$$\underset{x\to 3^-}{lim} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{10}{0^-} = -\infty \text{ et } \underset{x\to 3^+}{lim} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

Remarque

Pour le quotient de deux fonctions, il existe une phrase permettant de les mémoriser :

IRI ORO ROI de RIO

où $I = \pm\infty$, $R = \ell$ et $O = 0^\pm$

On cherche la limite en $-\infty$ de $x \mapsto x^2 + x^3$
Remarquons que nous avons une somme de deux fonctions où $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
Ainsi,

- ➤ $\underset{x\to-\infty}{lim} f(x) = x^2 = +\infty$
- ➤ $\underset{x\to-\infty}{lim} f(x) = x^3 = -\infty$

On obtient alors :

$$\underset{x\to-\infty}{lim} x^2 + x^3 = +\infty - \infty = FI$$

Pour résoudre une forme indéterminée, on va factoriser par le terme de plus haut degré qui ici est x^3.

$$x^2 + x^3 = x^3\left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}\right) = x^3\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

Calculons la limite de $\frac{1}{x}$ en $-\infty$.
On a $\underset{x\to-\infty}{lim} \dfrac{1}{x} = 0^-$
Ainsi on a :

$$\underset{x\to-\infty}{lim} x^2 + x^3 = \underset{x\to-\infty}{lim} x^3\left(\frac{1}{x} + 1\right) = -\infty(0+1) = -\infty$$

La limite de $x^2 + x^3$ en $-\infty$ est donc $-\infty$.

5.2.3) Limite de fonctions composées

DÉFINITION ***(Limite de composition de fonctions)***

Soient D, E deux parties de $\mathbb{R}$ avec $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions tels que $f(D) \subset E$.
Avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
Ainsi :

$$\underset{x\to a}{lim} f(x) = b \text{ et } \underset{x\to b}{lim} g(y) = c \text{ alors } \underset{x\to a}{lim}(g \circ f)(x) = c$$

Exemple

On considère la fonction $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$.
Alors on a $f \circ g$ où :

- ➤ $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ avec $\underset{x\to 0^-}{lim} f(x) = -\infty$
- ➤ $g(x) = x^2$ avec $\underset{x\to-\infty}{lim} g(x) = +\infty$

Ainsi, d'après la proposition précédante :

$$\underset{x\to 0^-}{lim} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = +\infty$$

Remarque

En cas d'indétemination, lorsque c'est possible on peut lever cette dernière en transformant l'expression de la fonction de façon à simplifier et pouvoir conclure :

- Mise en facteur du terme dominant
- Encadrement

5.3) Calcul de limites

5.3.1) Fonction négligeable

DÉFINITION ***(négligeable)***

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de D tel que $\underset{x\to a}{lim}\, g(x) \neq 0$.

La fonction f est dite **négligeable** devant g au point a.

Si la limite du quotient des fonctions est nul pour limite en a.

$$f \underset{a}{=} o(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{x\to a}{lim} \frac{f}{g}(x) = 0$$

Exemple

Soient $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

Montrons que f est négligeable devant g en $+\infty$.

$$\underset{x\to+\infty}{lim} \frac{f}{g}(x) = \underset{x\to+\infty}{lim} \frac{x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{lim} \frac{1}{x} = 0$$

Ainsi, on note alors $f \underset{+\infty}{=} o(g)$

5.3.2) Fonction équivalente

DÉFINITION ***(équivalence)***

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de D tel que $\underset{x\to a}{lim}\, g(x) \neq 0$.

La fonction f est dite **équivalente** devant g au point a.

Si la limite du quotient des fonctions est égal à 1 pour limite en a.

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{x\to a}{lim} \frac{f}{g}(x) = 1$$

Exemple
Soient $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$.
Montrons que f est équivalente devant g en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+0} = 1$$

Ainsi, on note alors $f \underset{+\infty}{\sim} g$

Proposition
Soit f et g deux fonctions équivalentes en un point a alors :

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell = \lim_{x\to a} g(x)$$

Autrement dit, deux fonctions dites équivalentes partagent la même limite au point d'équivalence.

5.3.3) Rétrospective sur les polynômes

DÉFINITION *(Polynôme)*

Soit $n \in \mathbb{N}$ *(entier naturel)*
Une **fonction polynôme** de **degré** n est une fonction de la forme :

$$x \mapsto a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où $a_n, \ldots, a_1, a_0$ sont les coefficients de degré n du polynôme, avec $a_n \neq 0$.

Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}$ et P une fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$$

où $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de réels avec $a_n \neq 0$.
Alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n X^n$ et ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n X^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } a_n > 0 \\ -\infty \text{ si } a_n < 0 \end{cases}$$

Exemple, *[page 62]*
On considère la fonction $x \mapsto x^2 + x^3$, le calcul de cette fonction en $-\infty$ aboutit à une forme indéterminée.
Or $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + x^3 = x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et $\underset{x \to -\infty}{lim} 1 + \frac{1}{x} = 1$, aisni on a $x^2 + x^3 \underset{-\infty}{\sim} x^3$
On en déduit donc que :

$$\underset{x \to -\infty}{lim} x^2 + x^3 = \underbrace{\underset{x \to -\infty}{lim}}_{\text{équivalent}} x^3 = -\infty$$

5.3.4) Fraction rationnelle

DÉFINITION ***(fraction rationnelle)***

On appelle **fraction rationnelle** toute fonction de la forme :

$$x \mapsto \frac{P(X)}{Q(X)}$$

où P et Q sont des **fonctions polynômes**.

Proposition
Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et P, Q deux fonctions polynômes définies par :

$$\forall X \in \mathbb{R} \qquad P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$

où $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{0 \leq k \leq m}$ sont deux familles de réels avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.
Alors on a :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$$

Ainsi :

$$\underset{x \to +\infty}{lim} \frac{P(X)}{Q(X)} = \underset{x \to +\infty}{lim} \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} \text{ si } n = m \\ 0 \text{ si } n < m \end{cases}$$

où, le signe de la limite est donné par le signe de $\frac{a_n}{b_m}$.

Exemple

Étudions la limite de $x \mapsto \dfrac{1-4x}{x^2+2}$ en $+\infty$.
On a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
Or d'après la proposition précédante :

$$x \mapsto \frac{1-4x}{x^2+2} = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

Où :

- $P(X) = 1 - 4X \underset{+\infty}{\sim} -4X$
- $Q(X) = X^2 + 2 \underset{+\infty}{\sim} X^2$

Ainsi on a :

$$\underset{x\to+\infty}{lim} \frac{1-4x}{x^2+2} = \underset{x\to+\infty}{lim} \frac{-4x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{lim} \frac{-4}{x} = 0$$

5.3.5) Comparaison de fonctions usuelles

Soient α, β deux réels positifs.
Alors,

- $\underset{x\to+\infty}{lim} \dfrac{ln}{x^\alpha} = 0$
- $\underset{x\to+\infty}{lim} x^\alpha \ln^\beta x = 0$
- $\underset{x\to+\infty}{lim} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha}$

On note aussi :

$$\ln^\beta x \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha) \text{ et } x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$$

Cela signifie en fait que :

- Les fonctions puissances dominent les puissances des fonctions logarithmique.
- Les puissances des fonctions exponentielles dominent les fonctions puissances.

Remarque

A savoir aussi :

- Limites remarquable en 0
- Limite de fonctions usuelles

5.3.6) Le théorème des gendarmes

DÉFINITION *(Théorème)*

Soient f, g, h trois fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Supposons que $\forall x \in D$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
Alors :

$$\underset{x\to a}{lim} f(x) = \underset{x\to a}{lim} h(x) = \ell \quad \Longrightarrow \quad \underset{x\to a}{lim} g(x) = \ell$$

Exemple

On cherche la limite de $x \mapsto \frac{1}{x}cos(x)$ en $+\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}cos(x) \leq \frac{1}{x}$

D'où :

- ➤ $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$
- ➤ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

D'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}cos(x) = 0$

5.4) Continuité d'une fonction

DÉFINITION *(continuité)*

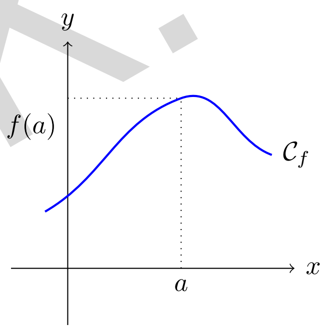
Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est **continue en a** si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

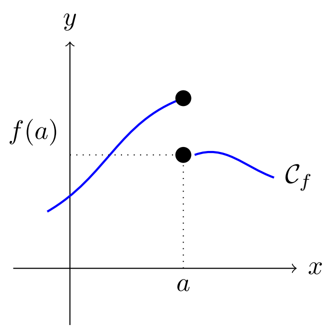
Graphiquement :
Une fonction est continue sur un intervalle I

- ➤ Si le graphe de la fonction ne présente aucun saut
- ➤ Si il est possible de tracer la courbe sans lever le stylo

fonction continue en a



fonction discontinue en a



Ainsi, on dit que f est **continue sur** I si et seulement si elle est continue en tout point $a \in I$.

DÉFINITION *(continue à gauche à droite)*

Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- ❏ f est **continue à gauche** de a si $\lim\limits_{x \to a^- = f(a)}$
- ❏ f est **continue à droite** de a si $\lim\limits_{x \to a^+ = f(a)}$

5.5) Fonction de classe

DÉFINITION ***(fonction de classe $\mathcal{C}^0$)***

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une fonction f définie sur D est dite de **classe $\mathcal{C}^0$** si et seulement si f est continue sur D.

Proposition
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^0$.

- $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^0$
- fg est de classe $\mathcal{C}^0$
- $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^0$
- λf est de classe $\mathcal{C}^0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
- $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^0$

5.6) Prolongement par continuité

Soient :

- I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- $a \in I$
- f une fonction définie et continue sur $I \backslash \{a\}$

Si $\displaystyle \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors il existe une unique fonction réelle définie et continue sur I, et égale à f sur $I \backslash \{a\}$.
Elle est appelée **prolongement par continuité** de f en a et correspond à la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

Exemple du cours
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$
Or $\displaystyle \lim_{x \to 0} f(x) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

Son prolongement est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\, g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Proposition, *Théorème des valeurs intermédiaires*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.
Si $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists x \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$

Remarque || Si la fonciton est **strictement monotone** sur $[a:b]$ alors c est unique.

5.7) Dérivabilité

DÉFINITION *(dérivabilité)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert i de $\mathbb{R}$ et $a \in i$.
La fonction f est **dérivable** si :

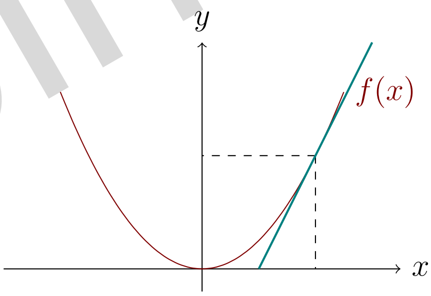
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ admet une } \underline{\text{limite finie}} \text{ en } a$$

Cette limite est appellée dérivée de f et est notée $f'(a)$.

Remarque || Si f est dérivable en a, alors la fonction $f'(a)$ représente la pente de la droite de la tangeante à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(a, f(a))$ dont l'équation est $\mathbf{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$.
La fonction :

$$x :\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est aussi appelée **taux d'accroissement** de la fonction f au point a.



Exemple
Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto c$
On note $D_f = \mathbb{R}$, le domaine de définition
Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}n\{a\}, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c - c}{x - a} = 0$$

On a donc $\underset{x \to a}{lim} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$
La fonction f est alors dérivable en a et sa dérivée en a est donnée par $f'(a) = 0$

Proposition
Soit f une fonction.
Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors elle est aussi continue en a.

DÉFINITION ***(Vocabulaire)***

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert i de $\mathbb{R}$.

- f est dite **dérivable sur i** si f est dérivable en tout points $a \in i$.
- Si f est dérivable sur i, alors la fonction $x \mapsto f'(x)$ est définie sur i et est appelée **fonction dérivée** de f et notée f'.
- f est dite **continûment dérivable** sur i si :
  - f est dérivale sur i
  - f' est continue sur i

DÉFINITION ***(Dérivabilité à gauche, à droite)***

Soient f une fontion définie sur un intervalle $i \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ une borne de i.

- f est **dérivable à gauche** de a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à gauche de a :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

- f est **dérivable à droite** de a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite de a :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Proposition

Soient f une fontion définie sur un intervalle $i \subset \mathbb{R}$ et $a \in i$.
f est dit dérivable en a si et seulement si :

- f est continue en a
- f admet une dérivée à gauche et à droite de a **égales**.

Toute fonction continûment dérivable sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
On note alors $f \in \mathcal{C}^1(D)$

Fonction (f)	Dérivée (f')	Ensemble dériva.
k, $k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Fonction	Dérivée	Condition
u^n	$nu'u^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\exp(u)$	$u'\exp(u)$	-
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
$\ln\|u\|$	$\frac{u'}{u}$	$u \neq 0$
u	u'	$u \neq 0$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
$\sin u$	$u'\cos u$	-
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	-
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}$	$u > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$
$\tan(u)$	$u'\left(1+\cos^2(u)\right)$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Fonction (f)	Dérivée (f')
$u \pm v$	$u' \pm v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u(v)$	$u'(v)v'$
$u^{-1} = \frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^2	$2uu'$

DÉFINITION ***(dérivée seconde)***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle i ouvert de $\mathbb{R}$.
f est dite **deux fois dérivable** sur i si la dérivée f' de f est dérivable sur i.
Dans ce cas la dérivée de f' est appelée **dérivée seconde** de la fonction f.
Elle est notée f'', $f^{(2)}$ ou encore $(f')'$

DÉFINITION ***(dérivée $n-ième$)***

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Une fonction f est dite n**-fois dérivable** sur i si il est possible de dériver n fois la fonction f sur i selon le princive de récurrence suivant :

$$\begin{cases} f^{(k)} = (f^{(k-1)})' & \forall k \in 1; n \\ f^{(0)} = f \end{cases}$$

Dans ce cas, la fonction $f^{(n)}$ est appelé **dérivé d'ordre** n de f sur i.

Remarque || f est indéfiniment dérivable sur i, si $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable sur i.

DÉFINITION ***(Fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$)***

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si f est n-fois dérivable sur D de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue sur D, alors la fonction f est dite de **classe** $\mathcal{C}^n$ sur D.
On note : $f \in \mathcal{C}^n(D)$

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si f est indéfiniment dérivable sur D de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue sur D, alors la fonction f est dite de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
On note : $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$

5.8) Étude de variation d'une fonction

Proposition *Étudier la variation d'une fonction*
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert i de $\mathbb{R}$,

1. Déterminer le domaine de définition D_f
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f et calculer sa dérivée
3. Étudier le signe de la dérivée
   - Si $f' \geq 0$ sur i, alors f est croissante sur i
   - Si $f' \leq 0$ sur i, alors f est décroissante sur i
   - Si $f' = 0$ sur i, alors f est constante sur i
4. Donner le tableau de variation de f
5. Calculer les limites de f aux bornes du domaine D_f pour compléter le tableau

Exemple
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Puisque $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition, *signe de la dérivé*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- Si $f'(x) \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

5.9) Image d'un intervalle

DÉFINITION *(image d'un intervalle)*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et f une fonction définie et continue sur $[a; b]$.

- Si f est croissante sur $[a; b]$, alors l'image de $[a; b]$ par f vérifier :

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$$

- Si f est décroissante sur $[a; b]$, alors l'image de $[a; b]$ par f vérifier :

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$$

Remarque Ce résultat s'adapte aux intervalles ouverts et aux intervalles avec des bornes infinies, en passant aux limites.

DÉFINITION *(maximum, minimum)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert i de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in i$.

- Le point x_0 est appelé **minimum** de f sur i si :

$$\forall x \in i,\ f(x_0) \leq f(x)$$

- Le point x_0 est appelé **maximum** de f sur i si :

$$\forall x \in i,\ f(x_0) \geq f(x)$$

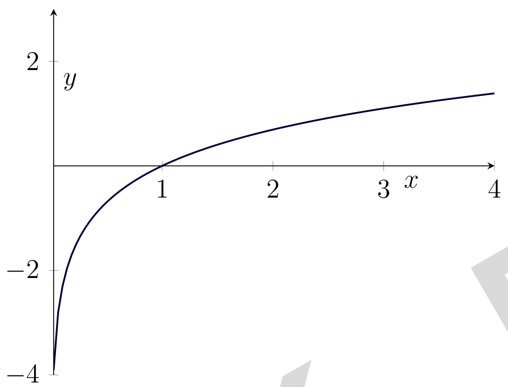
Proposition
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert i de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in i$.

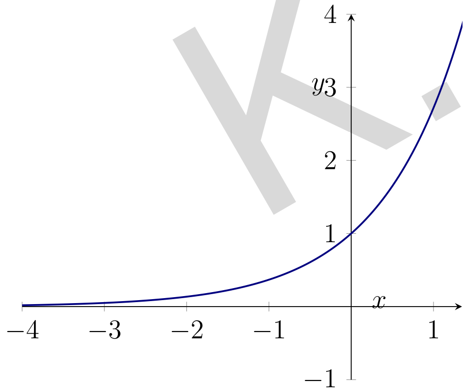
- Si f est une fonction dérivable en x_0 et que x_0 est un maximum/minimum de f sur i, alors $f'(x_0) = 0$.
- On suppose que f est <u>2 fois dérivable</u> sur i
  - Si $f'(x_0) = 0$ et $f'' \geq 0$, alors x_0 est un minimum de f sur i.
  - Si $f'(x_0) = 0$ et $f'' \leq 0$, alors x_0 est un maximum de f sur i.

f	$x \mapsto x$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^3$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x^3}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0^-	0	0	ND	ND
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$	0^-	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	$-\infty$	ND	ND
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$	0^+	0^+	0^+	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+	0^+	$+\infty$	0^+

Limite des fonctions usuelles

5.10) Exponentielle et logarithme





DÉFINITION *(La fonction $ln(x)$)*

La fonction **logarithme népérien** est l'unique fonction qui s'annule en 1 et dont la dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction ln est définie, dérivable et croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0} ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$$

Sa dérivée , $(ln(x))' = \frac{1}{x}$

DÉFINITION *(La fonction e^x)*

La fonction **exponentielle** notée exp, est l'unique fonction qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ y = exp(x) \Leftrightarrow x = ln(x)$$

exp est définie, dérivable et croissante de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \to -\infty} exp(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$$

Sa dérivée est elle-même, $(exp)' = exp$

Quelques règles et base à savoir sur les fonction ln et e.

- Le nombre $exp(1)$ noté e s'appelle **nombre exponentielle** et $e \in \mathbb{R}n\mathbb{Q}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $ln(exp(x)) = x$ ainsi que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{ln(x)} = x$
- $ln(1) = 0$; $ln(e) = 1$; $e^0 = 1$

Proposition

$x \mapsto ln(x)$

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

- $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$
- $ln(\frac{1}{x}) = -ln(x)$
- $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $ln(x^n) = n \times \ln(|x|)$

$x \mapsto e^x$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$
- $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
- $exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $exp(nx) = (exp(x))^n$

DÉFINITION *(en base a)*

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$
  Le **logarithme en base a** (log_a) est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$
  L'**exponentielle en base a** (exp_a) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, exp_a(x) = exp(x \times ln(a))$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$
  noton $y^x = exp(x \times ln(y))$ le nombre y à la puissance x.

Proposition, *les puissances*
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

- $a^0 = 1^x = 0$
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $ln(a^x) = xln(a)$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

Chapitre 6

Relation binaire

6.1) Introduction aux relations binaires

En mathématiques, une grande partie de l'étude des objets repose sur la compréhension des liens qu'ils entretiennent entre eux. Par exemple, en arithmétique, on peut comparer avec la relation $\leq$, et en géométrie, on peut étudier des figures ayant des propriétés similaire grâce à la relation d'égalité des formes.
Une **relation binaire** est un concept fondamental permettant de décrire ces liens entre des éléments d'un ensemble ou de plusieurs ensembles. Elle formalise des connexions entre les objets mathématiques et sert de base à de nombreuses structures utilisées en algèbre, en logique et en informatique.
Par exemple, lorsqu'on dit *"3 est plus petit que 5"*, on établi une relation entre ces deux nombres. De même, dire que *"Pierre est ami avec Marie"* exprime une relaiton sociale entre deux personnes. Ces relations bien qu'appliquées à des contextes différents, peuvent être étudiées avec des outils mathématiques communs.
Dans la suite, nous allons définir rigoureusement le concept de relation binaire, quels sont ses types et propriétés, ainsi que des exemples concrêt de leur application.

6.2) Complément sur les ensembles

Rappel de cours

Partie d'un ensemble
Soit E un ensemble.
Alors l'**ensemble des parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$$

Exemple
Soit $E = \{0, 1, 2\}$ alors on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1\}, \{1,2\}, \{2\}, \{0,1,2\}\}$$

Remarque On peut même aller jusqu'à dire que $\mathcal{P}(E)$ contient tout ensemble étant **inclu ou égal** à E, on note $\subseteq$.

DÉFINITION ***(Ensemble des applications)***

Soient E et F deux ensembles.
On appelle **ensemble des applications** de E dans F noté $\mathcal{F}(E,F)$ (ou F^E) l'ensemble de toutes les fonctions qui associent à chaque élément de E **un unique élément** de F.
Autrement dit, c'est l'ensemble des fonctions qui associe à tout élément de E un unique élément de F.

Rappel de cours

Application
On spécifie à chaque fois **associe un unique** élément de F, puisque on parle de l'ensemble des applications. Et pour rappel une application associe à chaque antécédant une seule image.

Rappel de cours

Le produit cartésien
Soit $n \geq 2$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n-ensembles. On note le **produit cartésien** défini par :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}$$

On aura l'occasion de le revoir un peu plus tard.

Un peu de notation

- L'ensemble $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n-fois}$ peut aussi être noté E^n
- Lorsque l'on note *"Prenons $x \in E^n$"*, cela revient simplement à dire que l'on prend un $n-uplet$ noté $(x_1, \ldots, x_n)$ où chaque élément x_i avec $i \in [1;n]$ appartient à E.

Rappel de cours

La notation $n-uplet$
On appelle $n-uplet$ un objet mathématiques noté $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ou $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$). Pour rappel ils sont **ordonnés** ce qui signifie que $(1,2) \neq (2,1)$ contrairement aux ensembles qui eux ne sont pas ordonnés.

Proposition, *Relation d'égalité*
Soit $E_1, \ldots, E_n$ n-ensembles.
et $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux $n-uplets$ de $E_1 \times \ldots \times E_n$.
Alors on dit que $X = Y$ si ils possèdent exactement le même nombre déléments que l'on notera n et si chaque élément à la position i sont égaux.

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall i \in [1;n] \quad x_i = y_i$$

Deux $n-uplets$ sont égaux si et seulement si :

- Il possèdent le même nombre d'éléments
- Leurs éléments sont dans le même ordre

DÉFINITION *(Partition d'un ensemble)*

Soit E un ensemble et $I \subset \mathbb{N}$.
Une famille $(F_i)_{i\in I}$ de parties d'éléments de E est appelée **partition de E** si les trois propositions suivantes sont vérifiées.

- ❏ $\forall i \in I$, on a $F_i \neq \emptyset$
  Tous les ensembles appartenant à la famille $(F_i)_{i\in I}$ ne doivent pas être vide.
- ❏ $\bigcup\limits_{i\in I} F_i = E$
  L'union de toutes les parties doit donner E.
- ❏ $\forall (i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$ avec $F_i \cap F_j = \emptyset$
  Toute intersection de deux parties différentes doit donner l'ensemble vide.

Exemple d'application
Soient $E = \{1, 2, 8, 6, 9, 4, 7\}$ et $\mathcal{G} = \{G_1, G_2\}$ une famille avec $G_1 = \{1, 8, 6\}$ et $G_2 = \{2, 9, 7\}$.
On cherche à savoir si $\mathcal{G}$ est une partition de E.

- ➤ Vérifions si toutes parties dans $\mathcal{G}$ est non vide.
  On a $G_1 = \{1, 8, 6\} \neq \emptyset$ et $G_2 = \{2, 9, 7\} \neq \emptyset$.
  Ainsi la première condition est vérifiée.
- ➤ Calculons l'union de toutes les ensembles de $\mathcal{G}$.
  $G_1 \cup G_2 = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$
  Or $G_1 \cup G_2 \neq E$ alors, la seconde propriété n'est pas vérifiée
  D'où $\mathcal{G}$ n'est pas une partition de E.

Remarque

- ❍ Si $(F_i)_{i\in I}$ est une partition de E. D'après la définition, $\forall x \in E$, il existe un unique $i \in I$ tel que $x_i \in F_i$.
  Autrement dit, chaque élément de E doit être contenu dans une unique partie F_i.
- ❍ Parfois, on utilise le terme de partition même si la première condition n'est pas vérifiée. On parle de partition **non-propre**.

6.3) Les relations binaires

6.3.1) *Principe de base*

DÉFINITION *(Relation binaire)*

Soient E et F deux ensembles non vide.

- ❏ Toute partie $\mathcal{R}$ de $E \times F$ est appelée **relation binaire** sur E et F.
- ❏ Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E et F, $(x, y) \in E \times F$.
  On dit que x et y sont **en relation** selon $\mathcal{R}$ si et seulement si $(x, y) \in \mathcal{R}$.
  On notera alors $x\mathcal{R}y$.
- ❏ Lorsque $E = F$, on parle de **relation binaire sur E**.

Remarque

En pratique, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E et F se définit généralement à l'aide d'un prédicat portant sur $E \times F$ précisant les éléments en relation :

$$\forall (x,y) \in E \times F \qquad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \mathcal{P}(x,y)$$

Dans ce cas l'ensemble $\mathcal{R} = \{(x,y) \mid \mathcal{P}(x,y)\}$

Rappel de cours

La notation $(x,y) \in E \times F$
Lorsque l'on prend $(x,y) \in E \times F$ en gros ça veut simplement dire que je prend un couple d'élément où $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple
La relation *"inférieur ou égal"* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \geq 0$$

est une relation binaire sur $\mathbb{R}$, elle est aussi notée $\leq$.

6.3.2) Représentation à l'aide d'un graphe

DÉFINITION *(Graphe)*

Une **graphe orienté** G est un couple (S, A) de deux ensembles où :

- S est un ensemble fini et non vide, celui des **sommets**.
- $A \subset S \times S$ est un ensemble dont les éléments sont appelés **arcs**.

Un graphe $G = (S, A)$ est souvent représenté graphiquement sur le plan $\mathbb{R}^2$ en suivant les règles suivantes :

- Chaque sommet S est représenté à l'aide d'un point sur le plan.
- Chaque arc (i,j) de A est représenté à l'aide d'une liaison orientée du point i vers le point j.

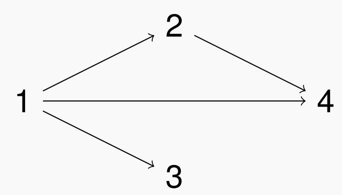
Représentation d'une relation avec un graphe
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E contenant n éléments. Il est possible de représenter cette relation à l'aide d'un graphe orienté $G = (S, A)$ où :

- L'ensemble des sommets du graphe G correspond à l'ensemble E. i.e. $S = E$
- L'ensemble des arcs du graphe G correspond à l'ensemble des relations entre les éléments de E. i.e.

$$A = \{(i,j) \in E^2 \mid i\mathcal{R}j\}$$

Exemple

$\mathcal{R} = \{(x,y) \mid x$ divise $y, \quad x, y \in \{1,2,3,4\}\}$



6.3.3) Représentation matricielle

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur les ensemble $[1;n]$ et $[1;m]$, avec $n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Il est possible de représenter cette relation à l'aide d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\{0,1\})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [1;n] \times [1;m] \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i\mathcal{R}j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,2),(3,4)\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3.4) Propriétés des relations binaires

Proposition
Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
La relation $\mathcal{R}$ est dite :

- **RÉFLÉXIVE** si tout élément de E est en relation avec lui-même.
  On note :

$$\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$$

- **SYMÉTRIQUE** si la relation entre chaque paire d'éléments et permutable.
  On note :

$$\forall x,y \in E \quad x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$$

- **ANTISYMÉTRIQUE** si lorsque chaque paire d'éléments sont en relations de manière permutable alors ils sont égaux.
  On note :

$$\forall x,y \in E \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \implies x = y$$

- **TRANSITIVE** si un premier élément est en relation avec un deuxième, et que ce deuxième est en relation avec un troisième, alors le premier est aussi en relation avec le troisième.
  On note :

$$\forall x,y,z \in E \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$$

DÉFINITION *(relation d'équivalence)*

Soit E une ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation.
$\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si et seulement si cette même relation est :

- ❏ Réfléxive
- ❏ Symétrique
- ❏ Transitive

L'équivalence se note $\sim$.

Remarque || Si $\forall(x, y) \in E^2$ on a $x \sim y$ alors x est dit équivalent à y.

Sur tout ensemble E, la relation d'**égalité** est une relation d'équivalence sur E.

Proposition
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.
La relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E par la propriété suivante est une relation d'équivalence sur E :

$$\forall(x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

Démonstration

- **Réféxivité**
  Soit $x \in E$
  On a $f(x)$, et par définition $f(x)$ est égal à lui même ainsi $f(x) = f(x) \Longrightarrow x\mathcal{R}x$
  $\mathcal{R}$ est réfléxive.
- **Symétrie**
  Soit $x, y \in E$
  Alors on a $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$
  Puisque l'égalité est commutative cela signifie que $a = b$ est équibalent à $b = a$.
  Alors on a :

$$f(x) = f(y) \iff f(y) = f(x)$$

  Ainsi la relation $\mathcal{R}$ est symétrique
- **Transitivité**
  Soit $x, y, z \in E$ alors par définition de la symétrie on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ c'est à dire :

$$f(x) = f(y) \qquad f(y) = f(z)$$

  Puisque $f(y) = f(z)$ dans la seconde affirmation alors on peut remplacer $f(y)$ par $f(z)$ dans la première affirmation.
  Ainsi on obtient :

$$f(x) = f(y) \text{ qui donne } f(x) = f(z)$$

  Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation transitive.
  En somme d'après les trois propriétés, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

DÉFINITION ***(classe d'équivalence)***

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
On appelle **classe d'équivalence**, l'ensemble des éléments de E partageant la même relation.

$$C(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

Les classes d'équivalences peuvent être notées $C(x)$, $\dot{x}$ ou encore $\overline{x}$.

Remarque || Autrement dit, la classe d'équivalence $C(x)$ représente l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation avec x.

DÉFINITION *(ensemble quotient)*

L'**ensemble quotient** représente l'ensemble de toutes les classes d'équivalences suivant $\mathcal{R}$.
On note :

$$E\backslash\mathcal{R} = \{C(x) \mid x \in E\}$$

Remarque

Représentant d'une classes d'équivalence
Soit $C \in E\backslash\mathcal{R}$, C est alors une classes d'équivalence.
Chaque élément qui se trouve dans C est appelé **représentant de** C.

Exemple
Considérons la relation suivante :

$$\forall D_1, D_2 \in \mathcal{D} \quad D_1\mathcal{R}D_2 \Longleftrightarrow D_1 \parallel D_2$$

où $\mathcal{D}$ représente l'ensemble des droites, et $\parallel$ pour parallèle.
Soit $D \in \mathcal{D}$ alors la classe d'équivalence de D :

$$C(D) = \{D' \in \mathcal{D} \mid D \parallel D'\}$$

Représente l'ensemble des droites qui sont parallèles à D.

Proposition
Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow C(x) = C(y)$$

Remarque

Deux éléments sont en relation si et seulement si leurs classes d'équivalence sont égales.

Proposition
Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Alors :

- $\forall x \in E$, on a $C(x) \neq \emptyset$
- $\bigcup\limits_{x \in E} C(x) = E$
- $\forall (x, y) \in E^2$ si $C(x) \neq C(y)$ alors $C(x) \cap C(y) = \emptyset$

Cette proposition ne vous fait pas penser à quelque chose ?
Évidemment que si, la définition d'une **partition** !

On montrera cette proposition en séance commune, juste pour vous prouver que tout est démontrable.

Remarque

La troisième condition signifie que si deux classes d'équivalences sont différentes alors elles sont disjointe. A l'inverse si elles partagent au moins un élément commun, alors elles sont égales.

Proposition
Soit E un ensemble non vide.

- ➤ Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
  Alors l'ensemble $E\backslash\mathcal{R}$ des classes d'équivalences suivant $\mathcal{R}$ est une partition de E.
- ➤ Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(P_i)_{i\in I}$ une partition de E. Alors la relation $\mathcal{R}$ sur E définie par :

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists i \in I, x \in P_i \text{ et } y \in P_i$$

  est une relation d'équivalence sur E.

6.4) Relation d'ordre

DÉFINITION *(relation d'ordre)*

Soit E une ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation.
$\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si et seulement si cette même relation est :

- ❏ Réfléxive
- ❏ Antisymétrique
- ❏ Transitive

Une relation d'ordre est le plus souvent noté $\leq$ ou $<$.

DÉFINITION *(ordre total)*

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné.

- ❏ Deux éléments x et y sont dit **comparables** si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
- ❏ Si **tous les éléments de l'ensemble ordonné sont comparables**, la relation est dite **d'ordre total** sur E.
  On dira alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

DÉFINITION *(Prédécesseur et successeur)*

Considérons $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
x, y deux éléments de E tels que :

- ❏ $x \leq y$
- ❏ $x \neq y$
- ❏ $\nexists z \in E$
  $(z \neq x, z \neq y) \wedge (x \leq z \leq y)$

Alors x est appelé **prédécesseur** de y. Et y est appelé **successeur** de x.

6.4.1) *Diagramme de Hasse*

Tout ensemble ordonné et fini $(E, \leq)$ peut être représenter dans le plan à partir d'un **diagramme de Hasse** selon la règle suivante :

- ➤ Chaque point du diagramme correspond à un élément de E dont la position suit la convention suivante :
  Si x est plus petit que l'élément y au sens de la relation $\leq$ alors x sera placé en dessous de y.

➤ Deux points correspondants à deux éléments x et y sont reliés par un segment dans le diagramme si x est un prédécesseur de y.

Remarque Si un ensemble est totalement ordonné alors son diagramme de Hasse sera une chaîne.

6.4.2) Ordre inverse

DÉFINITION *(Ordre inverse)*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E non vide.
Alors, la relation $\mathcal{R}^{-1}$ définie sur E par

$$\forall (x, y) \in E^2, \, x\mathcal{R}^{-1}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

est une relation d'ordre sur E appelée **ordre inverse** de $\mathcal{R}$ sur E.
Si $\mathcal{R}$ est d'ordre total sur E alors $\mathcal{R}^{-1}$ l'est aussi.

6.4.3) Ordre produit

DÉFINITION *(Ordre produit)*

Soit $(E, \mathcal{R})$ et $(F, \mathcal{S})$ deux ensembles ordonnés.
La relation $\mathcal{P}$ définie sur $E \times F$ par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in E \times F, \quad (a, b)\mathcal{P}(c, d) \Longleftrightarrow (a\mathcal{R}c \wedge b\mathcal{S}d)$$

est une relation d'odre sur $E \times F$, appelée **ordre produit** sur $E \times F$.

Proposition
Soit $(E, \mathcal{R})$ et $(F, \mathcal{S})$ deux ensembles ordonnés.
La relation $\mathcal{L}$ définie sur $E \times F$ par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in E \times F, \quad (a, b)\mathcal{L}(c, d) \Longleftrightarrow (a \neq c \wedge b\mathcal{R}c) \vee (a = c \wedge b\mathcal{S}d)$$

est une relation d'ordre sur $E \times F$.
Appelée **ordre lexicographique** sur $E \times F$.

Remarque Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont d'ordre totaux sur E et F alors $\mathcal{L}$ est un ordre total sur $E \times F$.

6.4.4) Majoration et minoration

DÉFINITION *(majorant, minorant)*

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et $A \subset E$ (une partie de E).
Soit $m \in E$.

❏ m est un **majorant** de A dans E si $\forall x \in A, \quad x\mathcal{R}m$

❏ m est un **minorant** de A dans E si $\forall x \in A, \quad m\mathcal{R}x$

Remarque

- La partie A de E est dite **majorée** si elle admet au moins un majorant dans E.
- La partie A de E est dite **minorée** si elle admet au moins un minorant dans E.
- A est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.