9 Rédiger pour prouver un sous-espace vectoriel

Méthode

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

On considère $F = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \ldots\}$.

1. Rappeler à quelles conditions F est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que le vecteur nul $0_{\mathbb{K}^n} \in F$.
3. Montrer qu'avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$ on a $\lambda x + y \in F$.
4. Conclure.

Montrer que $F = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

» Rappeler ce qu'est un sous-espace vectoriel

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :

1. $0_{\mathbb{R}^2} \in F$
2. $\lambda x + y \in F$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in F^2$

» Montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in F$

Par définition, on a :

$$0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Alors : $x_1 + 2x_2 = 0 + 2 \times 0 = 0 + 0 = 0$

d'où $0_{\mathbb{R}^2} \in F$. **(1)**

» Montrer que $\lambda x + y \in F$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y \in F$.

Posons $z = \lambda x + y$.

$$z = \lambda \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= \lambda x_1 + y_1 + 2(\lambda x_2 + y_2) \\ &= \lambda x_1 + y_1 + 2\lambda x_2 + 2y_2 \\ &= \lambda(\underbrace{x_1 + 2x_2}_{=0}) + \underbrace{y_1 + 2y_2}_{=0} \\ &= \lambda(0) + 0 = 0 \end{aligned}$$

Car $x, y \in F$.

Ainsi, $z = \lambda x + y \in F$ **(2)**

» Conclusion finale

Ainsi d'après **(1)** et **(2)** F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque

Si l'ensemble F possédait n conditions il aurait fallu effectuer les vérifications du vecteur nul et de la stabilité par le produit par un scalaire puis la somme sur chacune des conditions !