METH. ALGÉBRIQUE

les indispensables fiches méthodes

8 Résoudre une équation de degré 2 avec la méthode algébrique

Méthode

La méthode algébrique

On considère une équation de degré 2 de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Où $a, b, c \in \mathbb{C}$.

1. Déterminer les coefficients du polynôme a, b, c.
2. Calculer le discriminant du polynôme, $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Si $\Delta \in \mathbb{C}$.
   On pose $\Delta = \delta^2$.
   On cherche alors les solutions de la forme $\delta = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| & L_1 \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(\Delta) & L_2 \\ 2xy = \mathcal{I}m(\Delta) & L_3 \end{cases} \quad (1)$$

4. Résoudre le système et calculer les racines carrées de Δ.
5. Prendre en compte une des racines. En déduire les solutions du polynôme :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

Résoudre l'équation suivante :

$$z^2 + (1+i)z + i = 0$$

» Déterminer les coefficients du polynôme

On pose :

$a = 1$ $\qquad b = 1 + i$ $\qquad c = i$

» Calcul du discriminant Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (1+i)^2 - 4 \times 1 \times i \\ &= 1 + i + i + i^2 - 4i \\ &= 1 + 2i - 1 - 4i \\ &= -2i \end{aligned}$$

» Poser et résoudre le système

On a $\Delta \in \mathbb{C}$.
Alors on pose $\Delta = \delta^2$.
On cherche alors les solutions de la forme $\delta = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = 2 & L_1 \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(\Delta) = 0 & L_2 \\ 2xy = \mathcal{I}m(\Delta) = -2 & L_3 \end{cases} \quad (2)$$

- $L_1 - L_2$, $2y^2 = 2 \Longrightarrow y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm 1$
- $L_1 + L_2$, $2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$
- D'après L_3, $2xy < 0$ alors ils seront de signes contraires dans les solutions.

$$\delta_1 = 1 - i \text{ et } \delta_2 = -1 + i$$

» Déduire les solutions du polynômes

On considère ici δ_1.
Les solutions du polynômes sont données par :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-1 - i + 1 - i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$
$$z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-1 - i - 1 + i}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ainsi :

$$\boxed{z_1 = -i} \text{ et } \boxed{z_2 = -1}$$