7 Démontrer une équivalence

L'objectif de cette fiche est de réussir à démontrer une équivalence, avec la rédaction rigoureuse qui **sera demandée à l'examen**.

Équivalence

On considère $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux propriétés sur un ensemble E.
On dit que $\mathcal{P}_1$ est **équivalent** à $\mathcal{P}_2$ si **et seulement si** pour tout $x \in E$:

$$\mathcal{P}_1(x) \iff \mathcal{P}_2(x)$$

Cette notation signifie en fait que :

- Si $\mathcal{P}_1(x)$ est vraie alors $\mathcal{P}_2(x)$ l'es aussi.
- Si $\mathcal{P}_2(x)$ est vraie alors $\mathcal{P}_1(x)$ l'es aussi.

Cela se traduit de la manière suivante :

$$(\mathcal{P}_1(x) \text{ équivalent à } \mathcal{P}_2(x)) \iff (\mathcal{P}_1(x) \implies \mathcal{P}_2(x) \text{ et } \mathcal{P}_2(x) \implies \mathcal{P}_1(x)), \quad \forall x \in E$$

Ainsi, pour démontrer une équivalence, il suffit de montrer que chaque propriété implique l'autre.

Montrer la validité de l'équivalence suivante :

$$(z \in \mathbb{R}) \iff (z = \overline{z})$$

» Déterminer les deux propriétés mises en jeu
On pose $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les propriétés :

- $\mathcal{P} : z \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{Q} : z = \overline{z}$

Ainsi, pour montrer que $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ nous allons procéder en deux étapes :

1. Montrer que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
2. Montrer que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$

En fait, il suffit de supposer chaque propriété une à une et de montrer qu'elle engendre l'autre.

» Montrer que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
Soit $z \in \mathbb{R}$.
Alors z fais partie des complexes qui n'ont pas de partie imaginaire. C'est pour cette raison que $z = a + 0i = a$.
Ainsi $\overline{z} = a - ib = a - 0i = a = z$
D'où $z \in \mathbb{R} \implies \overline{z} = z$ **(1)**

» Montrer que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$
Soit $z = \overline{z}$ avec z un nombre complexe.
Alors on a,

$$\begin{aligned} z &= \overline{z} \\ a + ib &= a - ib \\ 2ib &= a - a = 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $b = 0$ alors z n'admet pas de partie imaginaire donc $z = a - 0i = a \in \mathbb{R}$ **(2)**

» Conclusion
Ainsi, d'après **(1)** et **(2)** on a $(z \in \mathbb{R}) \iff (\overline{z} = z)$.